



Modélisation de la dynamique océanique barotrope dans l'estuaire et le plateau amazoniens

Yoann Le Bars

► To cite this version:

Yoann Le Bars. Modélisation de la dynamique océanique barotrope dans l'estuaire et le plateau amazoniens. Planète et Univers [physics]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2010. Français. NNT: . tel-00494238

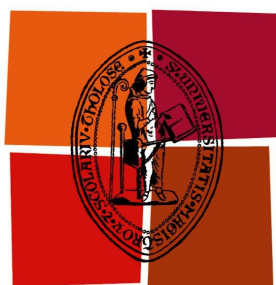
HAL Id: tel-00494238

<https://theses.hal.science/tel-00494238>

Submitted on 22 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul SABATIER (UT3 Paul SABATIER)

Discipline :

Océanographie physique

Présentée et soutenue par

Yoann LE BARS

le : 22 mars 2010

Titre :

Modélisation de la dynamique océanique barotrope dans l'estuaire et le plateau amazoniens

JURY

Nicholas HALL

Florent LYARD

David GREENBERG

Emmanuel HANERT

Daniel LE ROUX

Université Toulouse 3 Paul SABATIER, France

Legos, France

Bedford Institute of Oceanography, Canada

Université catholique de Louvain, Belgique

Ecole Polytechnique Universitaire de Lyon 1, France

Président du jury

Directeur de thèse

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

École doctorale :

Sciences de l'Univers, de l'Environnement et de l'Espace (SDU2E)

Unité de recherche :

Laboratoire d'étude en géophysique et océanographie spatiale (Legos)

Remerciements

Le grimmoire que vous tenez dans vos mains fébriles fait le résumé de plus de trois années de travail, visant à modéliser la dynamique océanique barotrope dans l'estuaire de l'Amazone. Toutefois, un tel travail ne peut se résumer aux seuls aspects scientifiques. Cela a également été l'occasion pour moi de découvrir des disciplines dont j'ignorais tout, à commencer par l'océanographie physique, mon cursus ayant été celui d'un mathématicien – il s'agissait, certes, de mathématiques appliquées, mais de mathématiques d'abord et avant tout.

En conséquence, je remercie mon directeur de thèse, Florent LYARD, pour m'avoir fait découvrir cette discipline qui était alors par moi inconnue et m'avoir permis de découvrir des problématiques intéressantes, pas seulement pour le mathématicien.

Je remercie également Catherine JEANDEL, l'initiatrice et coordinatrice du projet Amandes, pour avoir mis tout son enthousiasme non-seulement dans ce projet, mais également pour être ma marraine de thèse, en dépit de l'aspect surchargé de son emploi du temps.

Je n'oublie pas, bien sûr, Claude ESTOURNEL, relectrice attentive du présent mémoire, mais aussi d'articles, en plus de ses diverses charges scientifiques, Yves DU PENHOAT, directeur du laboratoire qui trouve le temps d'écouter les états d'âmes de thésards en perditions et Laurent ROUBLOU, toujours disponible pour dispenser une aide technique ô combien précieuse.

Merci, également, à Tristan ROUSSEAU, avec lequel j'ai partagé la cabine au cours de la mission Amandes II (mais quelle idée saugrenue d'emmener un mathématicien sur un navire) et à toute l'équipe du projet Amandes, tant pour les qualités scientifiques que pour la bonne humeur (qui compte pour beaucoup elle aussi).

Également, un grand merci à toute l'équipe de la bibliothèque de l'Observatoire de Midi-Pyrénées, pour leur disponibilité et leur capacité à se procurer les documents les plus incongrus.

Une thèse, ce n'est pas simplement intégrer une équipe, c'est également intégrer un laboratoire et toute sa faune bigarrée. En conséquence, je voudrais également remercier Matthieu LEHENNAF pour avoir été un compagnon de bureau dynamique et enjoué, qui était toujours prêt à transformer la studieuse ambiance qui régnait dans les lieux en juke-box, même si, oui, la Compagnie créole me rend dépressif – et encore, je n'ai pas trop passé de STOKHAUSEN, comme quoi je sais me tenir en société. Merci aussi à Pierre DEMEY, le directeur de recherche du bureau d'à-côté, pour les sujets qui n'ont

pas manqué de me plonger dans des abîmes de perplexités – où suis-je, où vais-je, dans quel état j’erre, est-ce que t’il, où cours-je, comment se fait-ce et, surtout, qu’en est-ce qu’on mange –, même s’il a qualifié une œuvre de XENAKIS de « bruit » !

Puis, un grand merci également à tous les thésards du laboratoire pour maintenir une ambiance de saine camaraderie, donc à Julien, à Jérôme, à Lionel, à Claire, à Renault, à William, à Mélanie, à Christine et, sacré bon-sang, j’en oublie, qu’ils veuillent bien me pardonner, de toute façon je me suis flagellé avec des orties fraîchement coupées : j’ai péché, j’expie. . .

Une thèse, c’est trois années de tergiversations et de remises en question, tant sur le plan scientifique qu’au niveau de son choix de vie. Sans tous les sus-cités, cette thèse n’aurait certainement pas connue la même conclusion : leur contribution doit être reconnue à leur juste valeur.

Enfin, même si la période de thèse est une période de forte charge de travail, les à-côtés sont importants, car ils apportent des moments bienvenus où relâcher la pression. En conséquence, je voudrais remercier chaleureusement les membres de l’école de musique de Ramonville, du TUC escrime, de l’association Armadag, de Festi’bulle et les habitués des *jam session* du Mandala : j’ai passé beaucoup de bons moments avec eux, qui ont été capables de me supporter pendant ces trois années, un exploit !

Pour finir, mes remerciements à ma famille, sans le soutien de laquelle je ne serais jamais arrivé au bout.

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	1
Enjeux scientifiques, environnementaux, sociaux et économiques	2
Le fleuve Amazone	4
Présentation générale	4
Bref historique de l'exploration, l'exploitation et l'étude de l'Amazone . .	6
Historique de l'étude de la marée océanique	9
Les premières théories	9
NEWTON et l'introduction de la théorie statique	12
Le développement de la mécanique des fluides	13
LAPLACE et l'introduction de la théorie dynamique	15
La méthode harmonique	16
Les modèles numériques	18
Organisation de ce document	19
 I Théorie de la dynamique des océans	 21
1 Mise en équation de la dynamique océanique	23
1.1 La physique des océans	25
1.1.1 Le potentiel générateur de la marée	26
1.1.2 Coefficient de charge et d'auto-attraction	28
1.1.3 Les courants marins	29
1.2 Équations de NAVIER-STOKES	29
1.3 Équations de SAINT-VENANT (<i>shallow water</i>)	32
1.4 Équations d'ondes	34
1.5 Les forces exercées sur le système	36
1.6 Conditions aux limites	37

1.7	Formulation variationnelle	39
1.8	Discrétisation	40
1.8.1	Résolution du maillage	41
1.8.2	Approximation sur le maillage	43
1.8.3	Discrétisation temporelle	49
1.9	Conclusion partielle	49
2	Mesures de la dynamique des océans	51
2.1	Marégraphes	53
2.2	Altimétrie	54
2.3	Courantomètre	57
2.4	CTD	58
2.5	Campagnes de mesures	58
2.6	Analyse harmonique	60
2.7	Conclusion partielle	61
II	La dynamique océanique dans l'estuaire de l'Amazone	63
3	La marée dans l'estuaire de l'Amazone	65
3.1	Le modèle Amandes	66
3.2	Compléments méthodologiques	85
3.2.1	Partitionnement du domaine	85
3.2.2	Travail du frottement de fond et flux d'énergie	85
3.2.3	Comparaison de l'approche de MANNING et de celle de CHÉZY	88
3.2.4	Formulation du coefficient de traînée	89
3.2.5	Formulation de PEDLOSKY	93
3.2.6	Formulation de DOWDEN	95
3.2.7	Convergence de la méthode de NEWTON pour les paramétrisations de la couche de mélange	97
3.3	Conclusion partielle	106
4	Trait de côte et bathymétrie	107
4.1	Base de données géographiques pour l'Amazone	108
4.2	Ondes de marée	127
4.2.1	Onde M_2	127
4.2.2	Onde K_1	127
4.2.3	Onde S_2	127

4.2.4	Onde M_4	127
4.2.5	Tableau statistique	132
4.3	D'une carte papier à un trait de côte numérique	132
4.3.1	Digitalisation	132
4.3.2	Vectorisation	133
4.3.3	Retour aux coordonnées sphériques	133
4.3.4	Coordonnées barycentriques	133
4.4	Conclusion partielle	134
Conclusion		135
	Perspectives	136
Annexes		141
A Algorithme pour la discrimination de zones		143
A.1	Recherche des polygones	145
A.1.1	Recherche des cycles élémentaires	145
A.1.2	Recherche du nœud de plus haut degré de chacune des composantes fortements connexes	148
A.1.3	Adaptation à la recherche de polygones	151
A.2	Fixer le paramètre de rugosité	157
A.3	Utilisation dans T-UGOm	158
A.4	Conclusion partielle	161
B Notes d'implémentation		163
B.1	Généralités	165
B.2	Gestion des erreurs	167
B.3	Coefficient logarithmique	168
B.4	Cartes de rugosités	169
Table des figures		173
Liste des tableaux		175
Liste des algorithmes		177
Bibliographie		179
Index		191

Résumé	193
Abstract	195

Introduction

À la frontière entre les continents et les océans, les marges continentales sont le siège de la grande majorité des apports de matière – dissoutes et solides, organiques et inorganiques – d’origine continentale vers l’océan. Elles sont aussi directement en contact avec les masses d’eau océaniques qui échangent de la matière et des éléments avec ces marges. L’érosion et le transport par les rivières étant une des sources essentielles des éléments chimiques à l’océan, la remise en suspension de matériel sédimenté et les forts mélanges d’eau favorisent les transferts de matière du continent vers l’océan.

Le projet Fluxandes, initié par Catherine JEANDEL (directeur de recherches CNRS au Legos), a pour objectif l’étude de ces échanges entre continents et océans. La première étape consiste à étudier une marge continentale passive, celle de l’Amazonie. Une marge continentale passive est le bord d’un continent après la distension¹ et la formation d’un océan. Le terme « passive » indique que cette zone n’évolue plus, les mouvements tectoniques se concentrant au niveau de la dorsale médio-océanique. La deuxième étape consistera à étudier une marge continentale active, la marge Pérou/Chili. Une marge active forme le bord d’un continent sous lequel plonge une plaque en subduction. Elle est affectée par une forte déformation accompagnée de séismes très forts et d’un important volcanisme. La première étape de Fluxandes est l’objet du projet Amandes (Amazonie-Andes), dont cette thèse fait partie.

Le projet Amandes se focalise donc sur l’estuaire de l’Amazonie. Les objectifs généraux et résultats attendus sont :

1. déterminer la nature, les transformations et la dispersion dans l’océan des flux des traceurs et des isotopes arrachés des montagnes andines par érosion et transportés par le fleuve Amazonie pour être rejetés dans l’océan ;
2. améliorer la modélisation couplée de la dynamique de l’estuaire de l’Amazonie, afin de mieux quantifier :
 - (a) le transport d’eau douce et son impact sur la circulation des eaux océaniques de la région ;
 - (b) les effets de la marée sur ce transport, ainsi que la redistribution et la re-suspension des sédiments ;
 - (c) l’impact de ces dynamiques sur la transformation et dispersion des éléments chimiques ;

1. Déformation des roches provoquée par la divergence des plaques tectoniques.

- quantifier l'impact de ces flux sur la composition chimique des masses d'eaux circulant le long de la marge amazonienne, qui subissent simultanément les contraintes du forçage de la marée, du courant nord brésilien et le frottement du vent sur la surface de l'océan.

Trois disciplines complémentaires – géochimie continentale et marine, océanographie physique et modélisation hydrodynamique (incluant l'assimilation de données) – sont associées pour atteindre ces objectifs.

A sein du projet Amandes, mon travail a porté sur la modélisation et plus particulièrement la modélisation dynamique barotrope, principalement la marée. À cette occasion, j'ai collaboré au développement du modèle T-UGOm (*Toulouse Unstructured Grid Ocean model*), qui est un modèle hydrostatique à grilles non-structurées ayant recours à des éléments mixtes (éléments finis et volumes finis).

Dans le processus d'échanges entre continents et océans, à plus forte raison dans le cas d'une marge passive telle que l'estuaire de l'Amazone, les phénomènes hydrodynamiques ont un rôle essentiel, notamment la marée et l'érosion due au débit du fleuve. Dans le cas de l'estuaire de l'Amazone, ces phénomènes ont de très grandes amplitudes. Leur compréhension est donc un point essentiel de l'étude.

Premier phénomène dynamique au niveau de l'Amazone par son amplitude, la marée a été le phénomène hydrodynamique le plus étudié au cours de cette thèse. Quoique son étude théorique soit ancienne et que les grands principes la régissant sont désormais bien connus, elle reste un problème ouvert et la mise en évidence des ondes internes l'a fortement relancée. Plus généralement, les phénomènes hydrodynamiques sont fortement inter-dépendants et régis par les équations de NAVIER-STOKES, dont l'étude est un des « problèmes du millénaire² ». Tant que cette étude ne sera pas achevée, aucun phénomène hydrodynamique ne pourra être considéré comme un problème réglé. Même une fois l'étude mathématiques des équations de NAVIER-STOKES terminée, il restera encore un travail théorique nécessaire pour appliquer les avancées alors obtenues au cas des océans. De plus, l'intérêt grandissant pour la climatologie, en raison de l'influence que peut avoir l'océan sur le climat, est la source de nouvelles interrogations, notamment sur la dynamique océanique. Ceci ouvre encore bien des perspectives dans l'étude de l'hydrodynamique océanographique, perspectives que cette thèse ne fait qu'effleurer.

Enjeux scientifiques, environnementaux, sociaux et économiques

Les océans couvrent environ 70 % de la surface du globe terrestre et constituent la composante lente du système climatique formé avec l'atmosphère. Le peuplement humain,

2. Au court du Congrès international des mathématiciens de Paris en 1900, David HILBERT (1862 - 1943) a formulé 23 problèmes, qui ont fortement influencé les recherches en mathématiques du XX^e siècle. Reproduisant cet exemple, l'Institut Clay pour les mathématiques a proposé en l'an 2000 sept problèmes, pour la résolution de chacun desquels il offre un million de dollars. La compréhension des équations de NAVIER-STOKES est l'un de ceux-là (voir [Fefferman, 2000]).

lui-même, ne se répartit pas équitablement sur les continents, mais est au contraire caractérisé par un fort tropisme en direction des océans : [Hinrichsen, 1998] indique que deux tiers de l'humanité habite à moins de 400 km du littoral, la moitié à moins de 200 km, occupant ainsi moins de 10 % de la surface continentale. Toujours selon cet auteur, les océans font vivre environ 200 millions de pêcheurs et 500 millions de personnes de manière indirecte, la moitié des ressources prélevées provenant des écosystèmes côtiers. Le rapport du Programme des Nations unies pour l'environnement paru en 2006 (voir par exemple *Le Monde* daté du 4 octobre 2006) prévoit une accentuation de cette tendance, estimant que la densité de population sur la bande côtière pourrait passer de 77 hab km⁻² en 1990 à 115 hab km⁻² à l'horizon 2025. Les côtes ont donc un rôle majeur, tant du point de vue social qu'économique.

Au-delà du peuplement humain, le milieu marin côtier est le lieu d'une dynamique complexe. À l'échelle du bassin, l'influence des courants localisés le long des côtes en fait une zone de transfert de masses d'eau. À plus grande échelle, les côtes forment un guide aux ondes de Kelvin, permettant la connexion de bassins distants. De plus, l'océan côtier constitue l'interface entre les côtes et le large, interface matérialisée par la présence de débordement de masses d'eau du large sur le plateau et, inversement, de panaches d'eaux du plateau vers le large. Ces derniers transportent des particules issues du lessivage des sols continentaux et nourrissent ainsi la zone hauturière en éléments géochimiques, essentiels pour la biologie marine. Par l'intermédiaire de l'océan côtier, le peuplement des côtes a donc une influence sur l'écosystème marin. Toute présence vivante, y compris l'activité humaine, impliquant une pollution, la compréhension de la dynamique côtière est essentielle dans la maîtrise de l'impact des activités sociales et économiques sur l'ensemble du système océanique.

De récentes alertes ont mis en évidence la nécessité de cette maîtrise. Par exemple, Ulamila KURAI WRAGG, coordinatrice de l'association féminine *Pacific Wave*, a déclaré dans *Le Monde* daté du 23 septembre 2009 que l'on « commence à voir des réfugiés climatiques ». Au Sommet de l'Aosis (Alliance des petits états insulaires) de 2009, le président des Maldives, Mohamed NASHEED, a quant à lui déclaré que si la température moyenne du globe terrestre devait augmenter de plus de 1,5 °C, « des nations insulaires seraient rayées de la carte » (*Le Monde* daté du 23 septembre 2009). Globalement, la montée du niveau des mers rend les côtes fragiles dans le monde entier : par exemple, le rapport sur l'*Évaluation du coût des impacts du changement climatique et de l'adaptation en France*, publié le 21 septembre 2009 par l'Observatoire national sur les effets du réchauffement climatique, estime que l'érosion « coûtera plusieurs dizaines de milliards d'euros à l'échelle du siècle pour la seule région Languedoc-Roussillon » (*Le Monde* daté des 27 et 28 septembre 2009). Le bassin amazonien, souvent qualifié de « poumon de la planète » et de par l'importance du fleuve Amazone, doit être l'enjeu d'une surveillance accrue.

De surcroît à ces enjeux, la dynamique océanique reste le sujet de questions scientifiques non résolues. Principalement, le bilan énergétique des marées n'est toujours pas bouclé, 30 % de l'énergie de la marée étant dissipée selon un processus encore mal connu.

Les ondes internes de marée, c'est-à-dire les oscillations verticales des isopycnes³ produites par l'interaction entre la marée et le relief sous-marin tel que les dorsales médio-océaniques ou les talus continentaux, sont soupçonnées de jouer un rôle majeur dans cette dissipation (voir par exemple [Lyard *et al.*, 2006]). Une partie de l'énergie de la marée est également dissipée par le frottement sur le fond, phénomène d'autant plus important que l'amplitude de marée est grande. Le plateau amazonien formant une zone de fortes marées, il constitue une des zones privilégiées pour l'étude de ces mécanismes.

Le fleuve Amazone

Présentation générale



FIGURE 1 – *L'estuaire de l'Amazone*

source : Jacques DESCLOITRES, MODIS Land Rapid Response Team, NASA/GSFC

Le fleuve Amazone mesure environ 6 500 km de long, pour un débit moyen de l'ordre de $170\,000\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$, avec un minimum de $69\,000\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$ en 1906 et un maximum de $282\,000\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$ en 1989 au niveau de la ville d'Óbidos, située à plus de 800 km de l'embouchure (voir [Callède *et al.*, 2002]). Une étude récente (voir [Callède *et al.*, 2010]) indique que son débit moyen à l'embouchure est de l'ordre de $200\,000\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$. Le fleuve charrie également une très grande quantité de particules et sédiments : [Milliman et Meade, 1983] estiment qu'il transporte jusque dans l'océan Atlantique $(1,2 \pm 0,1) \cdot 10^9\text{ t}$ de particules en suspension et $2,3 \cdot 10^8\text{ t}$ de matériaux dissous par an. En revanche, son cours est extrêmement plat : sur les 1500 derniers kilomètres, le fleuve ne subit que 20 m de dénivelé.

3. Les isopycnes sont les lignes joignant les points de même densité.

L'énorme débit du fleuve est donc seulement dû à l'impressionnante quantité d'eau qui se presse en amont. Ce débit est tellement important que l'eau de mer n'entre jamais dans l'estuaire (voir par exemple [Callède *et al.*, 2010, Gordeev *et al.*, 1992]). Au contraire, une large étendue d'eaux saumâtres se forme à l'embouchure, oscillant au gré des marées. Après avoir quitté cette étendue, les eaux du fleuve se déploient en un panache s'étendant sur plusieurs centaines de kilomètres dans l'océan Atlantique, le long des côtes sud-américaines, sous l'influence du courant nord-brésilien et des alizés (voir figure 1). Sous l'effet de la rétroflexion, c'est-à-dire l'infléchissement à rebours de l'extension du panache, les eaux de l'Amazonie se répandent dans l'océan Atlantique (voir figure 2).

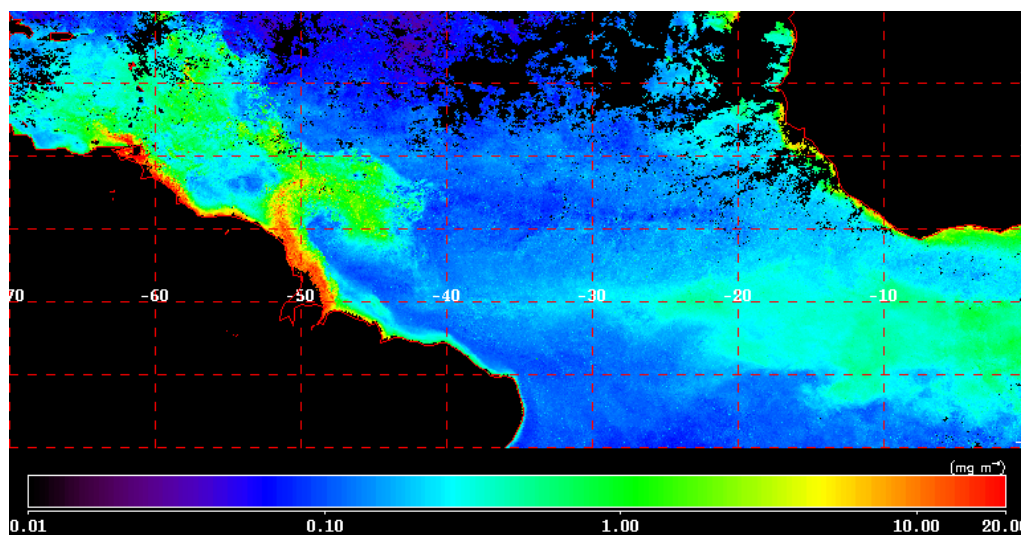


FIGURE 2 – *Rétroflexion du panache de l'Amazonie*
couleur de l'eau recomposée, source : MODIS Land Rapid Response Team, NASA/GSFC

Le fleuve est connecté à un large plateau continental s'étendant du Venezuela (10°N, 60°O) à la pointe est du Brésil (5°S, 35°O). [Gallo et Vinzón, 2005] indiquent que l'estuaire est classé comme une zone de fortes marées, avec une amplitude de marée comprise entre 4 m et 6 m, ainsi que zone de marée semi-diurne, avec un quotient entre onde de marée diurne et semi-diurne de 0,1. Ce plateau est particulièrement plat et peu profond. Par exemple, en se référant à la bathymétrie publiée par [Gallo et Vinzón, 2005], l'isobathe 20 m peut être distante de plus de 100 km des côtes.

L'importance des marées dans l'estuaire est la cause d'un important phénomène de mascaret⁴. Ainsi, d'après [Kosuth *et al.*, 1999], en période d'étiage (période où les eaux du fleuve sont les plus basses), les effets de la marée sont ressentis jusqu'à 1000 km à l'intérieur des terres. Selon les mêmes auteurs, en hautes eaux, en raison de la plus grande vitesse d'écoulement du fleuve, la vitesse de propagation diminue et l'onde est plus amortie. Elle se propage alors néanmoins jusqu'à Santarém, à près de 700 km de l'embouchure (voir figure 3).

4. Le mascaret est un phénomène de brusque surélévation de l'eau d'un fleuve ou d'un estuaire provoquée par l'onde de la marée montante lors des grandes marées.

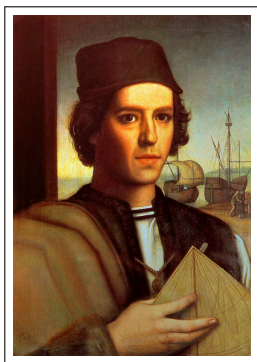


FIGURE 4 – *Vicente Yáñez PINZON*

Le navigateur espagnol Vicente Yáñez PINZON (vers 1460 - après 1523), notant l'absence de salinité au niveau de l'embouchure, découvre l'Amazone le 26 janvier 1500. Il se contentera de parcourir cette embouchure et donne alors au fleuve le nom de *Río Santa Maria de la Mar Dulce*. Le nom fut rapidement abrégé en *Mar Dulce*, puis enfin pour quelques années, après 1502, il fut connu sous le nom *Río Grande*. Le 24 juin 1541, pendant son voyage sur le fleuve, Francisco de Orellana (entre 1490 et 1511 - 1545) est attaqué par une tribu de femmes guerrières (à moins que ce ne fût des indigènes portant des cheveux longs). Les assimilant aux légendaires amazones, il donne son nom définitif au fleuve.

Vers 1735, l'explorateur et scientifique français Charles-Marie de la Condamine (1701 - 1774) effectue la première descente complète de l'Amazone. L'expédition est également l'occasion pour lui de ramener la première description de la quinquina, du caoutchouc et du curare (voir [de la Condamine, 1745]).

Durant les 350 années qui suivirent la première exploration européenne de l'Amazone par PINZON, la portion portugaise de son bassin resta presque entièrement à l'état sauvage, seulement occupée par des tribus indigènes qui, à cause de la quête difficile de nourriture, étaient divisées en de multiples fragments. Les difficultés rencontrées pour la chasse et la collecte de nourriture étaient telles que la densité de population de ces régions était probablement inférieure à 1 habitant pour 10 km² de territoire.

À la toute fin du XVIII^e siècle, le naturaliste, géographe et explorateur allemand Friedrich Heinrich Alexander Freiherr von Humboldt, connu sous le nom de Alexander von Humboldt (1769 - 1859), assisté du botaniste français Aimé Jacques Alexandre GOUJAUD dit Bonpland (1773 - 1858), met définitivement en évidence la connexion naturelle entre l'Orénoque et l'Amazone par l'intermédiaire du canal de Casiquiare. Ce sera l'occasion de relevés géographiques précis, ainsi que des relevés de la température du fleuve, du sol et de l'air, de la pression atmosphérique, l'inclinaison magnétique, la longitude et la latitude. Humboldt ramènera également de nombreux spécimens d'animaux et de plantes alors inconnus.

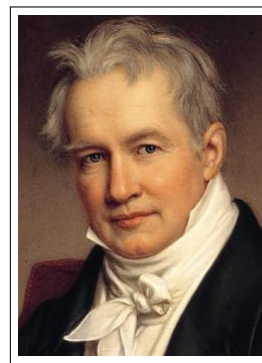


FIGURE 5 – *Alexander von Humboldt*

Quelques comptoirs ont été établis par le Portugal sur les rives de l'Amazone et de ses affluents, dans le but de commercer avec les amérindiens et de les évangéliser. En 1850, la population totale dans le bassin brésilien de l'Amazone était d'environ 350 000 habitants, dont les deux tiers étaient des Européens ou des esclaves (on comptait alors 25 000 esclaves).

La principale ville commerciale, Para, regroupait entre 10 000 et 12 000 habitants, esclaves compris. La ville de Manáos, maintenant Manaus, située à l'embouchure du Rio Negro, en comptait entre 1000 et 1500. Les autres villages, jusqu'à Tabatinga/Leticia sur la frontière entre le Brésil, la Colombie et le Pérou, étaient relativement modestes.

Le 6 septembre 1850, l'empereur Pierre II du Brésil (1831 - 1889) autorisa la navigation des vapeurs sur l'Amazone et délégua à Barao Maua (Irineu Evangelista de Sousa, 1813 - 1889) la tâche de mettre cela en œuvre. Il fonda la *Compania de Navigacao e Commercio do Amazonas* (Compagnie de navigation et de commerce de l'Amazone) à Rio de Janeiro en 1852 ; dans les années qui suivirent il débuta les opérations avec trois petits vapeurs, le *Monarch*, le *Marajo* et le *Rio Negro*.

Au départ, la navigation se limitait au fleuve principal. En 1857, le gouvernement obligea la compagnie à effectuer un service mensuel entre Para et Manáos avec des vapeurs d'une capacité de 200 tonnes, une seconde ligne effectuant six liaisons par an entre Manáos et Tabatinga et une troisième reliant deux fois par mois Para et Cameta. Ce fut un premier pas vers l'ouverture du vaste espace intérieur.

Le succès rencontré par cette entreprise attira l'attention sur les opportunités d'exploitation économique de l'Amazone. Bientôt une seconde compagnie fut créée et entreprit son commerce sur le Madeira, le fleuve Purus et le Negro. Une troisième établit une liaison entre Para et Manáos. Enfin, une quatrième trouva bénéfique de faire naviguer de plus petits vapeurs. Durant cette même période, la Compagnie de l'Amazone agrandit sa flotte et de petits promoteurs privés se lancèrent avec leur petit navire à vapeur sur l'Amazone et ses affluents.

Le 31 juillet 1867, le gouvernement brésilien, sous pression constante du pouvoir maritime et des pays encerclant le bassin amazonien supérieur, décréta l'ouverture de l'Amazone à tous les pavillons, tout en la limitant par des points définis : Tabatinga sur l'Amazone, Cameta sur le Tocantins, Santarem sur le Tapajos, Borba sur le Madeira et Manáos sur le Rio Negro. Le décret prit effet le 7 septembre 1867.

Manáos (Manaus), Para et Iquitos sont maintenant des villes commerciales prospères. Les premiers échanges commerciaux entre l'étranger et Manáos débutèrent en 1874. Le commerce local fut ensuite mené par le successeur britannique de la Compagnie de l'Amazone : *The Amazon Steam Navigation Company* (la Compagnie de navigation à vapeur de l'Amazone), ainsi que par les multiples petites compagnies de vapeurs engagées dans le commerce du caoutchouc. Les principales exportations de la vallée étaient le caoutchouc, le cacao, les noix brésiliennes et quelques autres produits d'importance mineure.

Cependant, le cours du caoutchouc va chuter, faisant fuir les gros planteurs. Le fleuve restera toutefois le sujet d'intérêt scientifique : de 1831 à 1958, il y a eu 14 estimations de débit de l'Amazone – soit à Óbidos, soit à l'embouchure. On peut également citer l'étude [Huber, 1902], l'une des rares à s'intéresser à la connexion entre l'Amazone et le Pará. Cependant, cet intérêt était alors devenu déclinant, la région ne semblant plus aussi prometteuse. Récemment, la découverte de pétrole dans cette région a relancé les intérêts – voir, par exemple, la série de documentaires de Steve ROBINSON intitulée *L'aventure amazonienne : Pétrole contre traditions*. Au cours des deux dernières décennies du vingtième siècle, l'Amazone est alors redevenue le sujet de projets scientifiques

de grandes ampleurs avec le projet Hybam – Hydro-géodynamique du bassin amazonien, voir [Guyot, 2008] – initié au début de la décennie 1980, puis le projet Amasseds (voir [AmasSeds Group, 1990]). Si la valorisation et l'exploitation raisonnée des ressources naturelles sont bénéfiques tant à l'environnement qu'à l'économie locale, il faut espérer qu'en apportant une meilleure connaissance du fonctionnement de cet écosystème, les projets Hybam et Amasseds aideront à ce que cette exploitation se fasse dans le cadre de ce que l'on nomme désormais le « développement durable ».

Historique de l'étude de la marée océanique

L'étude de la dynamique océanique, quoiqu'une discipline encore en évolution, n'est pas neuve : elle s'inscrit dans une histoire qui débute dès l'antiquité. Cette thèse hérite donc des travaux effectués par une longue lignée de prédécesseurs, dont j'évoque les avancées dans la présente section. Une grande part des éléments présentés ici viennent de [Simon, 2007].

Les premières théories

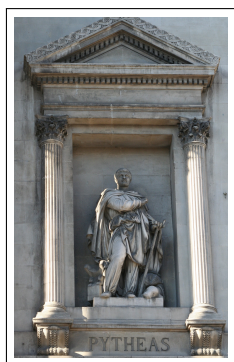


FIGURE 6 – Statue de Pythéas sur la façade du palais de la Bourse à Marseille

Quoiqu'Homère (fin du VIII^e siècle avant Jésus-Christ) y fasse allusion, l'un des premiers auteurs mentionnant réellement la marée dont nous ayons gardé une trace est Hérodoté (vers 484 ou 482 - vers 425 av. J.-C.). Il parle de l'élévation et de l'abaissement journalier des eaux de la Mer Rouge, sans donner plus de détails. Dans le dialogue de Platon (428 ou 427 - 347 ou 346 av. J.-C.) intitulé *Timée*, la marée est expliquée par la poussée des masses d'eaux océaniques induite par les crues des fleuves et des rivières. Héraclide du Pont (388 - vers 310 av. J.-C.), pour sa part, suppose que la Lune et le Soleil sont à l'origine des marées. Aristote (384 - 322 av. J.-C.), quant à lui, dans son livre *Du Monde*, note que la marée suit le mouvement de la Lune.

Cependant, l'étude des marées ne commence vraiment que vers 330 avant Jésus-Christ. Pythéas quitte alors la colonie grecque Massilia, future Marseille, pour un long voyage vers les îles britanniques (il va même vraisemblablement atteindre le cercle polaire). Là-bas, il observa des marées d'amplitudes insoupçonnées dans le monde méditerranéen. Non seulement il constata qu'il y avait deux pleines et basses mers par jour lunaire, mais également que l'amplitude de la marée dépendait des phases de la Lune. Malheureusement, il ne reste que peu d'éléments du récit de voyage de Pytheas. Le livre *De L'océan* qu'il a écrit à son retour ayant disparu, seules subsistent les analyses d'historiens et de géographes de l'époque, tels Polybe (entre 210 et 202 - 126 av. J.-C.) ou Ératosthène (vers 276 - vers 194 av. J.-C.).

C'est à-peu-près à la même époque que Sélerrens de Babylone observait les marées du golfe Persique et signalait les effets de la déclinaison des astres sur l'amplitude de la marée. Quelques 150 ans plus tard, l'astronome grec Selukos (entre 358 et 354 - 281 av. J.-C.), observant la marée de la Mer Rouge, découvrit les inégalités diurnes et relia leur amplitude à la déclinaison de la Lune.

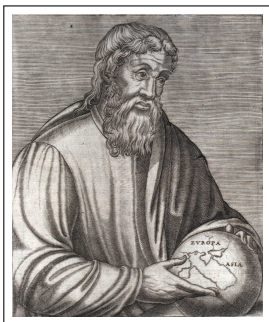


FIGURE 7 – *Strabon*, gravure du *xvi^e* siècle

Ensuite, au premier siècle avant Jésus-Christ, Posidanius de Rhodes (vers 135 - vers 51 av. J.-C.) établit pour les marées des côtes d'Espagne un tableau donnant la concordance de leurs variations diurnes, semi-diurnes et mensuelles avec les mouvements de la Lune et du Soleil. Strabon (vers 57 av. J.-C. - entre 21 et 25 ap. J.-C.), au début de l'ère chrétienne, décrit les marées du Portugal, d'Angleterre, du Danemark, d'Italie et du Golfe Persique. Il est celui qui s'intéresse le plus au voyage de Pythéas. Il en est également le principal détracteur, concluant qu'il s'agit d'un fabulateur, car il jugeait notamment peu crédible le fait que la mer pût être gelée.

Vers la même époque, Pline l'ancien (23 - 79 ap. J.-C.), autre lecteur de Pythéas, dans *Histoire naturelle*, mentionne l'établissement, l'âge de la marée, c'est-à-dire le retard des vives-eaux sur le moment de la syzygie (pleine-lune ou nouvelle lune), « les phénomènes célestes faisant toujours sentir leurs effets à la Terre avec du retard sur la vue, comme l'éclair, le tonnerre ou la foudre », ainsi que les variations annuelles de l'amplitude des vives-eaux. Pour lui, le phénomène de marée trouve son origine dans le Soleil et la Lune :

« Sur la nature des eaux, enfin, beaucoup a déjà été dit, mais cette avance et le retrait des flots sont les plus extraordinaires ; cependant si ce phénomène offre beaucoup de variété, sa cause réside dans le Soleil et dans la Lune. »

Il observe deux marées par jour :

« Entre deux levers de la Lune, la mer monte deux fois et redescend deux fois dans chaque intervalle de 24 heures. »

Enfin, il fait le constat que la marée n'est pas exactement semi-diurne :

« Jamais les marées ne se reproduisent au même moment que le jour précédent, comme si elles haletaient par la faute de l'astre avide qui attire à lui les mers pour s'abreuver. »

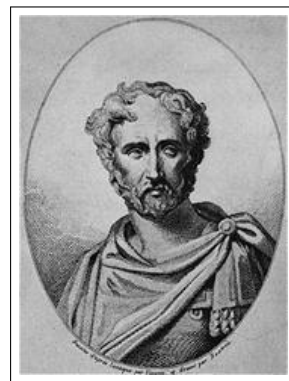


FIGURE 8 – *Pline l'ancien*

Ainsi, il y a deux millénaires, les caractéristiques les plus importantes de la marée étaient connues, grâce en particulier aux observations des grecs dans les îles britanniques et en Mer Rouge. Il fallut pourtant attendre quelque chose comme 1700 ans avant qu'une explication satisfaisante fût donnée à ce phénomène. Au cours de cette période, divers auteurs ont tenté d'expliquer les marées, avec plus ou moins de bonheur.

Saint Augustin (354 - 430), dans ses œuvres philosophiques, tente une explication des marées au travers d'une interprétation de la Génèse. Bede the Venerable (673 - 735), un moine britannique, pensait quant à lui que le jusant⁶ était dû au souffle de la Lune sur l'eau, le flot intervenant lorsque l'astre s'éloignait.

Toutefois, le christianisme du moyen-âge n'est pas propice aux études scientifiques de la nature, car tout écart de l'interprétation officielle de la Bible et donc de l'explication selon laquelle le Monde est monde est rapidement soupçonnée d'hérésie.

Un savant arabe, Zakariya AL-QWAZWINI (1203 - 1283), tenta la première explication scientifique. Selon lui, la marée montante était due à l'expansion thermique de l'eau échauffée par la Lune et le Soleil. Son hypothèse cependant ne pouvait à l'évidence pas expliquer pourquoi la Lune jouait le rôle le plus important.

Au XIII^e siècle, saint Thomas d'Aquin (vers 1225 - 1274) réconcilie les sciences et la religion en écrivant : « les chrétiens n'ont pas à craindre la philosophie païenne, car toute étude de la nature est l'étude d'une œuvre de Dieu ». Lui-même attribut l'origine des marées à la Lune. En bon aristotélicien, il l'explique par le principe de sympathie entre les corps : l'eau de la Lune attire l'eau de la Terre.

L'astronome allemand Johannes KEPLER (1571 - 1630) était convaincu que l'explication de la marée devait être recherchée dans une force attractive de la Lune et du Soleil, force qui devait être une sorte de magnétisme. Il était probablement inspiré par la récente découverte du magnétisme terrestre par le physicien britannique William GILBERT (1544 - 1603).

Le physicien et astronome italien Galileo GALILEI (francisé en Galilée) (1564 - 1642) se dit surpris que KEPLER s'intéressât à l'action de la Lune sur l'eau, à des phénomènes occultes et autres « enfantillages ». Lui-même croyait, soutenant la théorie de Nicolas COPERNIC (1473 - 1543) de la rotation de la terre, que les marées étaient générées par l'effet combiné de la rotation de la terre autour de son axe et de son mouvement orbital autour du soleil.

Galilée consacre toute la « Quatrième journée », conclusive du *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde* publié en 1632, à la marée. Considérant sa théorie des marées comme l'une de ses contributions majeures, il avait d'ailleurs envisagé d'intituler [Galilei, 2000] « Du flux et du reflux de la mer » (voir [Lévy-Leblond, 2009]).

Surestimant l'importance de la vitesse de translation due à la description de l'orbite terrestre par rapport à la rotation de la Terre sur elle-même, il explique les marées par les accélérations et décélérations résultants de la combinaison de ces deux mouvements. Les phénomènes de mortes-eaux et de vives-eaux étaient selon lui dû au système pendulaire composé par le Soleil, la Terre et la Lune, ce qui impliquerait que les vives-eaux se produiraient à la nouvelle lune uniquement et les mortes-eaux à la pleine lune uniquement, ce qui est contraire à l'observation.

Le père Georges FOURNIER (1595 - 1652), aumônier de la Flotte royale, démontre les erreurs de Galilée. Dans son livre intitulé *Hydrographie*, paru en 1643, il explique les marées par l'excitation des exhalaisons souterraines sous l'action de la Lune et du Soleil.

6. Le jusant est la période où la marée est descendante.

César d'Arçons (? - 1681), de son côté, dans *Le secret du flux et du reflux de la mer, et des longitudes, dédié à la Sapience éternelle* paru en 1655, explique la marée à l'aide d'un mouvement de va-et-vient de la Terre le long de l'axe du monde, tandis que Scalberge MINIÈRE, dans son *Traité des causes naturelles du flux et reflux de la mer*, paru en 1680, les attributs à la dilatation des mers par le Soleil, la Lune jouant un rôle de miroir.

René DESCARTES (1596 - 1650), défendit l'idée de l'origine lunaire des marées. Selon lui, la Lune et la Terre sont chacune entourées d'un grand tourbillon. La pression exercée par le tourbillon de la lune sur celui de la terre était transmise à la surface de la terre et générait les marées.

Le mathématicien anglais John WALLIS (1616 - 1703) proposa en 1666 une version amendée de la théorie de Galilée en cherchant à y inclure l'influence de la Lune. Il proposa d'expliquer les oscillations de la marée non seulement par le mouvement de la Terre autour du Soleil, mais également par son mouvement autour du centre de gravité du système Terre-Lune.

NEWTON et l'introduction de la théorie statique

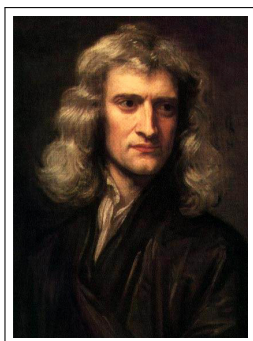


FIGURE 9 – *Portrait d'Isaac NEWTON par Godfrey KNELLER (1689)*

En se basant sur les travaux de Galilée, Evangelista TORRICELLI (1608 - 1647), René DESCARTES, Christian HUYGENS (1629 - 1695) et Robert HOOKE (1635 - 1703) – ce qu'il a revendiqué, déclarant dans une lettre adressée à Robert HOOKE en 1676 : « si j'ai vu plus loin, c'est parce que je me suis appuyé sur les épaules de géants », reprenant une formule de Bernard de Chartres (vers 1130 - 1160) –, Isaac NEWTON (1642 - 1727) publie le 5 juillet 1687 l'ouvrage intitulé *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. [Newton, 1687] établit les fondements de la mécanique classique. Il permet ainsi la première explication plausible de l'origine des marées.

Il montre que celle-ci réside dans l'attraction exercée sur les molécules des océans, d'une part par la lune en raison de sa proximité, d'autre part par le soleil en raison de sa masse, les planètes ayant une influence parfaitement négligeable. Un calcul simple de mécanique céleste montre que la force génératrice de la marée est la différence entre la force d'attraction gravitationnelle qui s'exerce sur un corps isolé situé à la surface de la Terre et celle que subirait ce corps s'il était situé au centre de la Terre. Avec cette théorie, NEWTON pouvait expliquer les trois propriétés remarquables des marées : la période fondamentale de 12 heures lunaires⁷, la relation entre l'amplitude et les phases de la lune et l'inégalité diurne. Il put également calculer les forces génératrices de la marée, exercées respectivement par le Soleil et la Lune. Pour le Soleil, en utilisant la perturbation de l'orbite

7. On définit le jour lunaire comme la durée au bout de laquelle la lune revient à la verticale du même point. Une journée lunaire est alors décomposée en 24 heures lunaires.

lunaire, il calcula que cette force était égale à $1/12900000$ fois la force de gravité lorsque l'astre était au zénith ou au nadir⁸ et à sa distance moyenne. Cette valeur est remarquablement proche de celle qui est admise actuellement. Cependant, en analysant les rapports entre les amplitudes en vive-eau et en morte-eau d'après les observations effectuées sur les côtes anglaises, il trouva que la force exercée par la Lune était 4,5 fois celle exercée par le Soleil, alors que la valeur réelle est 2,2. Ainsi, il surestima l'influence de la Lune approximativement d'un facteur 2.

La théorie statique de NEWTON était une avancée formidable. Toutefois, reposant sur l'idée qu'à tout instant la surface des mers prend la figure d'équilibre correspondant à la position de l'astre attirant, elle est inconciliable avec l'inertie des masses d'eau et la rapidité du mouvement des astres. Elle est inapte à expliquer en particulier l'âge de la marée ou l'importance des amplitudes observées le long des côtes. Les progrès de la mécanique des fluides vont par la suite permettre d'affiner la compréhension de la dynamique océanique.

Le développement de la mécanique des fluides

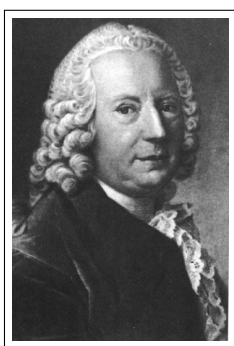


FIGURE 10 – Daniel BERNOLLI

En 1738, Daniel BERNOLLI (1700 - 1782), se basant sur les théories de NEWTON, publie l'ouvrage *Hydrodynamica*. Jean LE ROND d'Alembert (1717 - 1783), dans son article sur l'hydrodynamique de l'*Encyclopédie* (tome VIII, 1765), considère que [Bernoulli, 1738] est le texte fondateur de l'hydrodynamique en tant que discipline physique moderne. BERNOLLI y montre l'importance du principe de la conservation de l'énergie et y introduit le théorème qui porte son nom, le « théorème de BERNOLLI », qui décrit un écoulement incompressible et irrotationnel (ce qui traduit un écoulement non tourbillonnaire) pour un fluide parfait⁹. En 1740, BERNOLLI publie un *Traité sur les marées*. Y analysant les observations de marées faites à Brest entre 1714 et 1717, il trouva un rapport entre les marées lunaire et solaire de 2,5, proche de la valeur théorique.

En 1757, Leonhard Paul EULER (1707 - 1783), collaborateur et ami de BERNOLLI, publie un mémoire à l'Académie des sciences de Berlin. [Euler, 1757] établit les équations décrivant les fluides parfaits, tant incompressibles que compressibles. Ces équations portent désormais son nom : « équations d'EULER ».

En 1788, Joseph-Louis LAGRANGE (1736 - 1813) publie l'ouvrage intitulé *Mécanique analytique*, qui fonde cette discipline. Il y reformule la mécanique classique de NEWTON : introduisant la notion d'action physique, il établit le principe de moindre action, qui

8. Le nadir est le point de la sphère céleste auquel aboutirait une verticale tirée à partir du point où se tient un observateur et passant par le centre de la Terre. Le nadir est diamétralement opposé au zénith.

9. Un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte ni les effets de viscosité, ni la conductivité thermique.

indique qu'un objet suit la trajectoire qui minimise l'action à chaque instant, permettant d'obtenir très facilement les équations du mouvement d'un système complexe sans avoir à utiliser la notion de force. Plusieurs chapitres de [Lagrange, 1788] sont consacrés à la mécanique des fluides.

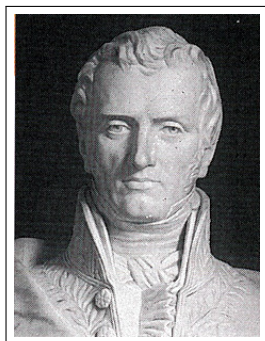


FIGURE 11 – *Claude-Louis NAVIER*

Modifiant les équations d'EULER afin de prendre en compte les forces entre molécules dans un fluide, Claude-Louis Marie Henri NAVIER (1785 - 1836) établit les équations de la dynamique des fluides incompressibles en 1821 (voir [Navier, 1821]). En 1822, il élargit ces équations au cas des fluides visqueux (voir [Navier, 1822]).

Totalement indépendamment et en utilisant une tout autre méthode (recourant à des flots continus), George Gabriel STOKES (1819 - 1903) établit les mêmes équations vingt ans plus tard (voir [Stokes, 1842]). Ces équations prévalent toujours dans la description des phénomènes hydrodynamiques et sont désormais connues sous le nom : « équations de NAVIER-STOKES ».

Adhémar-Jean-Claude BARRÉ DE SAINT-VENANT (1797 - 1886), en se basant sur les équations de NAVIER-STOKES (qu'il avait lui-même ré-établi dès 1843), pose un modèle d'équations dans l'hypothèse où la profondeur est faible en comparaison de l'étendue d'eau dans [Barré de Saint-Venant, 1871], désormais connu sous le nom d'« équations de SAINT-VENANT » (*shallow water* dans la littérature de langue anglaise). Bernhard RIEMANN (1826 - 1866) avait montré que les équations de la forme de celles de SAINT-VENANT possèdent une propriété remarquable : moyennant un changement de variables, les équations peuvent prendre une forme canonique traduisant le fait que deux quantités se conservent pour les points se déplaçant aux vitesses « caractéristiques ». Ces quantités sont appelées « invariants de RIEMANN ». Elles sont fonction de la hauteur et de la vitesse de l'eau et peuvent être interprétées comme des ondes qui descendent et remontent le courant en se déplaçant à ces vitesses caractéristiques (voir [Coron *et al.*, 2009]).

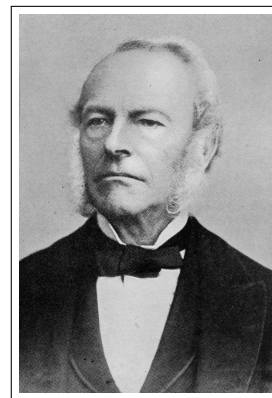


FIGURE 12 – *George STOKES*

LAPLACE et l'introduction de la théorie dynamique

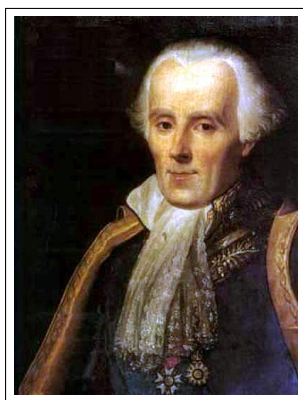


FIGURE 13 – *Pierre-Simon LAPLACE*

Dans une théorie présentée à l'Académie royale des sciences en 1775, Pierre-Simon LAPLACE (1749 - 1827) introduisit le potentiel générateur de la marée (voir [Laplace, 1778]). Plus tard, il développa considérablement cette théorie (voir [Laplace, 1797]) et l'introduisit en 1799 dans son traité de mécanique céleste (voir [Laplace, 1990]). Il fut le premier à traiter la marée comme un problème de mouvement de masses d'eau et non comme un problème statique.

Selon le point de vue de LAPLACE, qui n'a jamais été remis en cause, la réponse de la mer à la force génératrice de la marée prend la forme d'ondes générées de manière diffuse à travers les océans. Ces ondes se propagent avec des vitesses qui dépendent de la profondeur et, comme toutes les ondes, en fonction du milieu de propagation, elles sont réfléchies, réfractées et dissipées. Il s'ensuit que la marée observée en un point est le résultat de la superposition de toutes ces ondes élémentaires arrivant de tous les points des océans et qui, chacune sur son trajet, a rencontré des conditions de propagation différentes. Ces ondes peuvent évidemment interférer entre elles, renforçant ou au contraire atténuant certaines fréquences.

Les équations hydrodynamiques formulées par LAPLACE ne pouvaient pas être résolues avec les moyens de calcul de l'époque, mais elles sont à la base de tous les développements ultérieurs et, surtout, elles permirent d'établir une formule dite « formule de LAPLACE », applicables aux prédictions de marées, en s'appuyant sur deux principes essentiels :

- celui des oscillations forcées, suivant lequel les masses d'eau soumises à une force périodique exécutent des oscillations de même période que cette force ;
- celui de la superposition des petits mouvements, suivant lequel le mouvement total d'un système soumis à de petites forces est égal à la somme des mouvements élémentaires.

Ces principes posent en fait l'hypothèse de la linéarité de la réponse des océans à la sollicitation de la force génératrice des marées. Il se trouve que cette hypothèse est assez bien vérifiée pour Brest, dont les observations de marée furent utilisées par LAPLACE pour tester sa théorie. La formule de LAPLACE admet donc que, puisque la force génératrice de la marée peut être décomposée en forces périodiques élémentaires, la marée peut elle-même être décomposée en oscillations de mêmes périodes. L'hypothèse de linéarité n'est pas incompatible avec le fait que les facteurs de proportionnalité et les déphasages entre la marée et la force génératrice peuvent dépendre de la fréquence. Ils dépendent également des conditions hydrauliques de propagation de l'onde de marée, différente d'un point à l'autre et doivent en pratique être déterminées expérimentalement en analysant les observations de marée disponibles.

Un aspect fondamental de la formule de LAPLACE est la mise en évidence pour la marée générée par la lune comme pour celle qui est générée par le soleil de trois termes distincts correspondant respectivement à une oscillation à longue période (désormais nommée M_f pour celle d'origine lunaire et S_a pour celle d'origine solaire), une oscillation diurne (K_1 pour la lune et O_1 pour le soleil) et une oscillation semi-diurne (M_2 et S_2).

Cette séparation est restée le fondement de la théorie des marées, mais l'intérêt principal de la formule de LAPLACE réside probablement dans son aptitude à fournir une méthode pratique de prédiction. L'ingénieur hydrographe Antoine Marie Rémi CHAZALLON (1802 - 1872) publia en 1839 son *Annuaire des marées des côtes de France*, qui constitue le premier annuaire de marée calculé de manière scientifique. Les heures et hauteurs des pleines et basses mers à Brest étaient calculées à l'aide de la formule de LAPLACE, tandis que pour les autres ports, elles étaient obtenues à l'aide de « concordances » avec la marée de Brest. Malgré quelques réticences initiales dues au poids des habitudes, l'annuaire des marées s'imposa rapidement auprès des navigateurs en remplacement des tables, établies empiriquement, qui étaient alors publiées ici ou là, mais dont la précision laissait probablement beaucoup à désirer.

La formule de LAPLACE est restée à la base du calcul de l'Annuaire des côtes de France pendant plus de 150 ans. Avant l'avènement des ordinateurs, aucune méthode concurrente n'a pu, en effet, se prévaloir de fournir une meilleure précision pour le calcul de la marée de Brest. Pourtant, en raison de l'hypothèse de linéarité qui en est la base, cette formule ne pouvait prétendre être applicable universellement. Elle n'a d'ailleurs véritablement été utilisée que pour le calcul de la marée à Brest et, bien que dans ce cas l'hypothèse de linéarité soit assez bien vérifiée, il a fallu lui apporter quelques retouches pour corriger certains écarts systématiques.

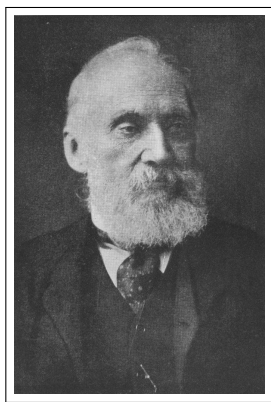


FIGURE 14 – *Lord Kelvin*

Par la suite, il faut noter les travaux des anglais William WHEWELL (1794 - 1866) et George Biddell AIRY (1801 - 1892), qui s'intéressèrent particulièrement à la propagation de l'onde de marée, le premier dans les océans, le second dans les canaux et les rivières, en tenant compte des frottements.

Mais il faudra attendre la fin du XIX^e siècle et les travaux de William THOMSON, connu sous le nom de Lord Kelvin (1824 - 1907), pour qu'un progrès décisif soit apporté au calcul des prédictions de marée.

La méthode harmonique

Déjà Thomas YOUNG (1773 - 1829) avait suggéré l'importance de l'observation et de l'analyse de la totalité de la courbe de marée et non seulement les pleines et basses mers comme le faisait LAPLACE. AIRY apporta aussi sa contribution en établissant les bases de l'analyse harmonique. Toutefois, c'est à Kelvin que revient le mérite d'avoir développé une méthode pratique d'analyse des observations de marée. En 1867, la *British Association for the Advancement of*

Science mit en place un comité destiné à promouvoir l'amélioration et la généralisation de l'analyse harmonique des marées. Le rapport de ce comité fut rédigé par Kelvin et publié l'année suivante (voir [Tidal Observations Committee, 1868]). Quelques rapports complémentaires parurent sur ce sujet, mais la contribution la plus importante a été apportée par le rapport publié en 1883 par George Howard DARWIN (1845 - 1912) où apparaissait un développement du potentiel générateur de la marée, qui a été universellement utilisé et qui a été longtemps à la base de tous les travaux sur les marées (voir [Darwin, 1883]).

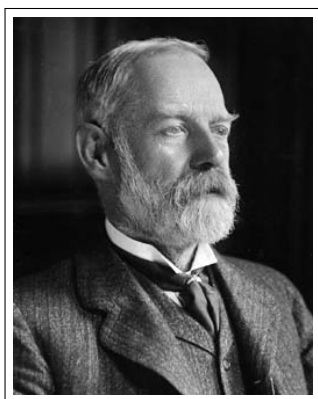


FIGURE 15 – George DARWIN

Encore aujourd'hui, les composantes harmoniques sont désignées sous les noms attribués par DARWIN et les méthodes de calcul qu'il a mises au point, adaptées aux moyens de l'époque, ont souvent été transposées telles qu'elles sur les ordinateurs. Pourtant, son développement, qui repose sur une ancienne théorie lunaire dans laquelle tous les éléments sont rapportés à l'orbite, n'est pas entièrement satisfaisant, car il n'est pas purement harmonique. En effet, des facteurs correctifs doivent être introduits pour tenir compte de variations des termes du développement. Cependant, les variations étant suffisamment lentes, ces facteurs correctifs, d'une part, peuvent être considérés comme constants sur des périodes d'environ une année, d'autre part, ont été calculés pour de nombreuses années et sont disponibles sous forme de tables. Le fait d'avoir recours à des tables n'est pas satisfaisant lorsque les calculs

se font sur ordinateur, mais n'est pas une gêne pour le calcul manuel.

C'est probablement la raison pour laquelle la méthode de DARWIN a continué à être utilisée si longtemps, alors que dès 1921, un développement purement harmonique, donc plus satisfaisant, était disponible. C'est encore à un anglais, Arthur Thomas DOODSON (1890 - 1968) que l'on doit ce progrès. [Doodson, 1921] donne un développement plus précis pour la longitude et la latitude de la Lune, telles qu'elle sont données par Ernest William BROWN (1866 - 1938) dans une nouvelle théorie lunaire (voir [Brown, 1896]). Ils sont rapportés à l'écliptique et le nouveau développement est purement numérique et harmonique. Il donne un bien plus grand nombre de termes que ceux donnés par DARWIN. Ne nécessitant pas de facteurs correctifs, le recours à des tables n'est plus nécessaire, ce qui facilite leur traitement automatique. D'autres développements, plus complets ou plus précis, ont été proposés depuis, mais pour les applications pratiques en calculs de marée, ils n'apportent pas de progrès significatif et le développement de DOODSON reste la référence. C'est également DOODSON qui a été le premier à décrire le phénomène des marées dans les eaux peu profondes (« *shallow water* »), notamment dans les régions côtières et dans les estuaires.

Les modèles numériques

La méthode harmonique, grâce aux travaux de DARWIN et de DOODSON, a pu être développée et exploitée jusqu'à ses derniers retranchements pour fournir une méthode pratique, précise et potentiellement de portée universelle de prédiction de marée. Elle n'est cependant pas fondamentalement différente de la méthode de LAPLACE, en ce sens qu'elle s'appuie sur une formulation théorique dont un certain nombre de paramètres sont à déterminer expérimentalement en analysant les observations disponibles. Pour obtenir une bonne précision, celles-ci doivent être de durée suffisante. Typiquement, lorsque l'amplitude de la marée est du même ordre de grandeur que celle que l'on observe sur les côtes françaises de la Manche ou de l'Atlantique, une année de mesures de bonne qualité sont nécessaires pour obtenir la précision requise pour les besoins de la navigation. Les résultats ne sont alors utilisables que pour le site où les observations ont été réalisées.

Une approche plus ambitieuse, consistant à résoudre directement le problème physique de la génération et de la propagation de l'onde de marée dans son milieu, a été envisagée depuis longtemps. Les pionniers en sont Daniel BERNOUILLI, William WHEWELL, Henri POINCARÉ (1854 - 1912) et Rollin Arthur HARRIS (1863 - 1918). Cependant, compte tenu de la complexité de la bathymétrie et du trait de côte des bassins océaniques, il n'était pas envisageable d'obtenir une solution exacte de ce problème sans de puissants moyens de calcul. Des solutions analytiques ont néanmoins permis d'expliquer qualitativement les grands traits de la propagation de la marée dans des bassins océaniques tels que l'Atlantique. En particulier, l'existence de points amphidromiques, où l'amplitude de la marée est nulle et autour desquels tournent les ondes de marée, a pu être établie analytiquement.

Depuis un siècle, sous l'impulsion de Henri POINCARÉ, on s'intéresse beaucoup plus à la résolution qualitative : on ne s'intéresse désormais plus aux solutions analytiques, pour préférer une approche où l'on discrétise les équations, les résolvant numériquement en divers points, pour ensuite interpoler la solution sur l'ensemble du modèle. Les mathématiciens français Laurent SCHWARTZ (1915 - 2002), qui établit la théorie des distributions, et Jacques-Louis LIONS (1928 - 2001), ont apportés la théorie nécessaire à cette approche. Elle est devenue véritablement fructueuse avec l'avènement des ordinateurs et l'introduction des méthodes numériques. En particulier, les travaux de l'allemand [Hansen, 1949], ont été à l'origine de nouvelles tentatives de résolution des équations de LAPLACE pour les océans réels. Ceci a permis la réalisation de modèle d'océan globaux, c'est-à-dire reproduisant la dynamique océanique sur tout le globe terrestre, ceci à grande échelle, donc avec une résolution assez faible. On peut citer par exemple les modèles de [Accad et Pekeris, 1964, Accad et Pekeris, 1978], [Bogdanov et Magarik, 1967], [Hendershott, 1972], [Zahel, 1977], [Schwiderski, 1980a, Schwiderski, 1980b], [Cartwright et Ray, 1991] ou plus récemment [Lyard *et al.*, 2006]. Cependant, pour atteindre la précision exigée par les applications et interrogations récentes, il s'avère nécessaire d'alimenter ces simulations globales par des raffinements régionaux. Les projets d'études des zones côtières, tel que le projet Amandes, nécessite également des simulations régionales précises. La modélisation de ces zones nécessite une résolution plus fine et la prise en compte de nombreux phénomènes, donc des mo-

dèles plus coûteux en terme de puissance de calcul. En conséquence, la mise au point de tels modèles, comme par exemple celui de [Werner et Lynch, 1987], a été plus tardive et est encore le sujet de recherches actives. Notamment, la comparaison avec les mesures montre la nécessité d’améliorer non seulement la connaissance du milieu et en particulier la bathymétrie, mais également d’affiner la mise en équation. En effet, des problèmes physiques majeurs, associés à la dissipation de l’énergie des marées, restent posés.

Récemment, l’altimétrie et la trajectographie satellitaires ont suscité des besoins nouveaux de connaissance précise de la marée au large et provoqué un regain d’intérêt pour la modélisation de la marée océanique. Par ailleurs, l’altimétrie satellitaire a fourni de nouvelles méthodes de mesures. Les mesures altimétriques de marées et leur assimilation dans les modèles ont été l’un des moteurs d’un regain d’intérêt dans l’étude de la marée, dont John WHAR, David CARTWRIGHT ou Christian LE PROVOST (1943 - 2004) ont été parmi les acteurs majeurs. Suite au décès brutal de Christian LE PROVOST, cet héritage a en partie été repris par mon directeur de thèse, Florent LYARD. La présente thèse, réalisée au sein du Legos – Laboratoire d’étude en géophysique et océanographie spatiale, unité mixte du CNRS et de l’université Paul SABATIER – s’inscrit donc dans cette filiation.

Organisation de ce document

Cette thèse est organisée en deux parties. La partie I présente la théorie de la dynamique océanographique. Le chapitre 1 fait l’inventaire des différents phénomènes qui entrent en jeu dans la dynamique océanographique et pose les développements mathématiques de cette étude. Ensuite, le chapitre 2 détaille les observations utilisées pour valider ou invalider la théorie.

Dans la partie II, nous nous intéressons au cas concret de l’estuaire de l’Amazone. Le chapitre 3 présente le travail effectué pour la simulation de la marée et la prise en compte du frottement de fond, tandis le chapitre 4 développe les efforts faits sur la bathymétrie.

Pour finir, des conclusions sur le travail effectué sont données, ainsi que des pistes pour des développements futurs, tandis que les annexes décrivent quelques points techniques qui méritent d’être mis en lumière dans ce document, à savoir des précisions sur les développements algorithmiques pour prendre en compte les variations géographiques du frottement de fond (annexe A) et des notes sur la méthodologie d’implémentation informatique utilisée pendant ce travail de thèse (annexe B).

Première partie

Théorie de la dynamique des océans

Chapitre 1

Mise en équation de la dynamique océanique

Il s'agit donc de modéliser la dynamique d'un fluide (l'eau de mer). Les différents développements dont l'historique a été évoqué précédemment ont permis d'établir quels sont les processus entrant en jeu dans la dynamique océanographique. Ce chapitre en présente l'inventaire, avant de les mettre en équation.

Nous nous plaçons dans l'hypothèse de continuité, c'est-à-dire que, bien que la nature notoirement particulière des fluides, donc de l'eau de mer, soit pleinement établie, on considère le fluide étudié comme un milieu continu, que l'on peut diviser indéfiniment et dont les propriétés matérielles sont caractérisées par des fonctions définies sur des ouverts de \mathbb{R}^3 . Cette hypothèse est couramment employée, car il s'avère que les réactions macroscopiques des fluides réels sont pour ainsi dire identiques aux réactions d'un fluide continu théorique. De même, on se place dans le cadre de la mécanique classique, dont le domaine de validité correspond parfaitement aux échelles de grandeurs des phénomènes étudiés. Ceci nous permet de mettre en équations les phénomènes.

Pour résoudre ses équations, nous avons opté pour la méthode des éléments finis et l'utilisation de grilles non-structurées. L'intérêt de cette approche est son adaptabilité. Notamment, une grille non-structurée peut s'adapter finement aux particularités de la zone modélisée. Dans le cas de l'estuaire de l'Amazone, où la géographie est particulièrement complexe, cette spécificité est critique.

Pour une présentation plus exhaustive de la physique des océans et des équations qui la régissent, le lecteur pourra se référer à [Cushman-Roisin, 1994, Gill, 1982, Pedlosky, 1987].

Sommaire

1.1	La physique des océans	25
1.1.1	Le potentiel générateur de la marée	26
1.1.2	Coefficient de charge et d'auto-attraction	28
1.1.3	Les courants marins	29
1.2	Équations de NAVIER-STOKES	29
1.3	Équations de SAINT-VENANT (<i>shallow water</i>)	32
1.4	Équations d'ondes	34
1.5	Les forces exercées sur le système	36
1.6	Conditions aux limites	37
1.7	Formulation variationnelle	39
1.8	Discrétisation	40
1.8.1	Résolution du maillage	41
1.8.2	Approximation sur le maillage	43
1.8.3	Discrétisation temporelle	49
1.9	Conclusion partielle	49

1.1 La physique des océans

Comme nous l'avons vu précédemment, dans le cas de la marée terrestre, seuls la Lune et le Soleil ont des impacts significatifs, qui s'additionnent ou se contrarient selon les positions respectives de la Terre, de la Lune et du Soleil. Quoique de masse beaucoup plus petite que le Soleil, la Lune est également beaucoup plus proche de la Terre, de sorte que leurs attractions sont d'ordres de grandeurs comparables : celle du Soleil est environ la moitié de celle de la Lune. Les autres corps célestes sont trop éloignés pour que leur influence soit sensible.

La force génératrice de la marée est la résultante de deux forces :

- la force d'attraction gravitationnelle exercée par l'astre, proportionnellement à sa masse et en raison inverse du carré de sa distance ;
- la force centrifuge identique en tout point de la Terre, due au mouvement de la Terre sur son orbite autour du centre de gravité du système Terre-astre.

Au centre de la terre, ces deux forces se compensent exactement (voir figure 1.1).

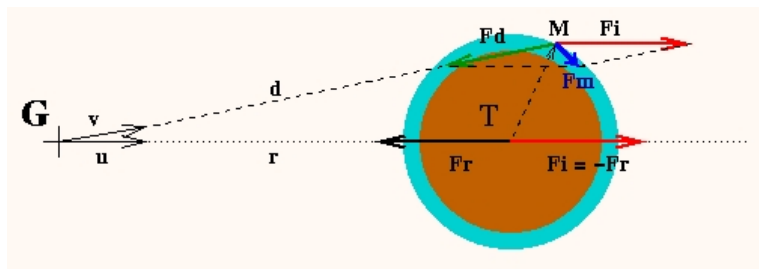


FIGURE 1.1 – Forces génératrices de la marée

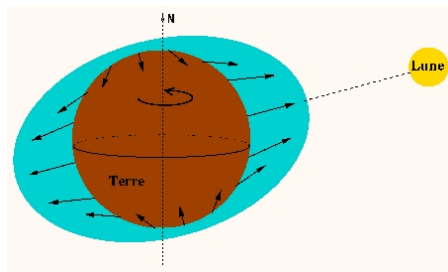
source : http://www.shom.fr/fr_page/fr_act_oceano/maree/origine_f.htm

Lorsque l'astre est au-dessus de l'horizon, la force d'attraction qu'il exerce est la plus importante, tandis que lorsqu'il est en dessous de l'horizon, c'est la force centrifuge qui l'emporte.

Si l'océan était en équilibre avec la force génératrice de la marée, sa surface prendrait la forme d'un ellipsoïde de révolution dont le grand axe serait dirigé vers l'astre. Il s'agit de la marée statique de NEWTON (voir figure 1.2).

Du fait de la rotation de la terre autour de son axe, un observateur situé à sa surface observerait généralement deux pleines mers et deux basses mers par jour, l'une dans la direction de l'astre, l'autre dans la direction opposée, deux basses mers étant observées lorsque l'astre est à l'horizon.

Il peut arriver, pour les latitudes élevées, lorsque la déclinaison est importante, que l'astre n'atteigne pas l'horizon. La pleine mer secondaire a alors disparu et la marée devient de type diurne : on observe une seule pleine mer et une seule basse mer par jour. Deux cycles fondamentaux sont donc observés dans la marée statique : le cycle diurne et le cycle semi-diurne.

FIGURE 1.2 – *Marée statique*

source : http://www.shom.fr/fr_page/fr_act_oceano/maree/origine_f.htm

D'autre part, le fait que le plan de rotation de la Lune autour de la Terre n'est pas confondu avec le plan de rotation de la Terre autour du Soleil implique des variations dans l'amplitude des marées.

Toutefois, cette attraction combinée de la Lune et du Soleil (plus petite) est perturbée ou même parfois contrariée par d'autres phénomènes physiques comme l'inertie des masses d'eau, la forme des côtes, les courants marins ou encore la profondeur des mers.

1.1.1 Le potentiel générateur de la marée

Les marées sont donc dues aux attractions combinées de la Lune et du Soleil. On note $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées d'un point. Soient, en un point P de la surface du globe terrestre :

- t le temps (unité SI : s). Nous placerons toujours l'origine des temps au début des simulations, donc $t \in \mathbb{R}^+$;
- $\Pi_a(x, y, t)$ le potentiel générateur des marées (unité SI : $\text{m}^2 \text{s}^{-4}$), $\Pi_a \in \mathbb{R}^+$;
- $\Pi_o(x, y, t)$ le potentiel généré par l'astre perturbateur, c'est-à-dire soit la Lune, soit le Soleil (unité SI : N m kg^{-1}), $\Pi_o \in \mathbb{R}^+$;
- $G = (6,674\,28 \pm 0,000\,67) \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{kg}^{-2}$ la constante de gravitation ;
- M_o la masse de l'astre perturbateur (unité SI : kg). Une masse ne peut pas être négative, donc $M_o \in \mathbb{R}^+$;
- $d_o(x, y, t)$ la distance entre le point P et l'astre perturbateur (unité SI : m). Une distance ne peut pas être négative et, le point étant à la surface de la Terre, il n'est pas accolé à l'astre, donc $d_o \in \mathbb{R}_*^+$;
- $R_o(x, y, t)$ la distance entre le centre de la terre et l'astre perturbateur (unité SI : m). Une distance ne peut pas être négative et, le point étant à la surface de la Terre, il n'est pas accolé à l'astre, donc $R_o \in \mathbb{R}_*^+$;
- $a = 6\,371 \cdot 10^3 \text{ m}$ le rayon d'une sphère ayant le même volume que la Terre ;
- $\psi_o(x, y, t)$ l'angle zénithal de l'astre perturbateur au point P (unité SI : rad). Il s'agit d'un angle, donc $\psi_o \in [0; 2\pi]$.

La théorie de la gravité en mécanique classique donne (voir par exemple [Kane et Sternheim, 2004]) :

$$\Pi_o = GM_o \left(\frac{1}{d_o} - \frac{a \cos \psi_o}{R_o^2} \right). \quad (1.1.1)$$

On peut ainsi définir le potentiel généré par la Lune (Π_L) et celui généré par le Soleil (Π_S). On a :

$$\Pi_a = \frac{\Pi_L + \Pi_S}{g}.$$

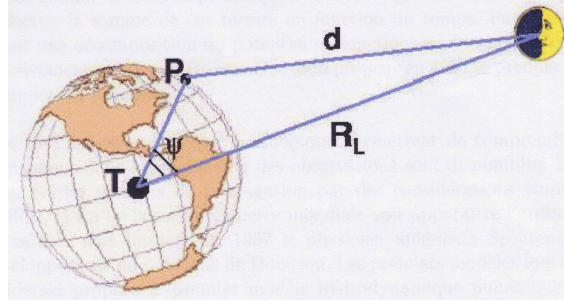


FIGURE 1.3 – *Le système Terre-Lune*
source : [Letellier, 2004]

Le théorème d'AL-KASHI¹ (voir par exemple [Tauvel, 2005]) permet d'exprimer d_o en fonction de a , R_o et ψ_o :

$$d_o^2 = a^2 + R_o^2 - 2aR_o \cos \psi_o, \quad (1.1.2)$$

$a > 0$ et $R_o > 0$, donc :

$$\frac{1}{d_o} = \frac{1}{R_o \sqrt{1 - 2\frac{a}{R_o} \cos \psi_o + \frac{a^2}{R_o^2}}}. \quad (1.1.3)$$

Soient les polynômes de LEGENDRE² suivant :

$$\begin{cases} P_0(\cos \psi_o) = 1, \\ P_1(\cos \psi_o) = \cos \psi_o, \\ P_{n+1}(\cos \psi_o) = \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi_o) \cos \psi_o - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(\cos \psi_o), \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Dans le cas de la Lune, $a/R_L \approx 1/60$ et, dans le cas du Soleil, $a/R_S \approx 1/2,5 \cdot 10^4$, donc $a/R_o \ll 1$. L'équation 1.1.3 peut donc s'exprimer sous la forme d'une somme de polynômes de LEGENDRE :

$$\frac{1}{d_o} = \frac{1}{R_o} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[P_n(\cos \psi_o) \left(\frac{a}{R_o} \right)^n \right]. \quad (1.1.5)$$

1. Ghiyath ad-Din Jamshid Mas'ud AL-KASHI (vers 1380 - 1429)

2. Adrien-Marie LEGENDRE (1752 - 1833)

D'après [Le Provost, 1974], en se limitant à l'ordre deux, on couvre déjà 98 % du signal de marée. On peut donc écrire le potentiel 1.1.1 ainsi :

$$\Pi_o \approx \frac{3}{4}GM_o \frac{a^2}{R_o^3} \left(\cos^2 \psi_o - \frac{2}{3} \right). \quad (1.1.6)$$

Soient $(R_o, \lambda_o, \varphi_o)$ les coordonnées de l'astre dans le référentiel géocentrique et $(R_p, \lambda_p, \varphi_p)$ les coordonnées du point P . Alors :

$$\cos \psi_o = \sin \varphi_o \sin \varphi_p + \cos \varphi_o \cos \varphi_p \cos (\lambda_p - \lambda_o), \quad (1.1.7)$$

donc :

$$\begin{aligned} \Pi_o \approx \frac{3}{4}GM_o \frac{a^2}{R_o^3} & \left[\frac{1}{3} (1 - 3 \sin^2 \varphi_o) (1 - 3 \sin^2 \varphi_p) \right. \\ & + \sin (2\varphi_o) \sin (2\varphi_p) \cos (\lambda_p - \lambda_o) \\ & \left. + \cos (2\varphi_o) \cos (2\varphi_p) \cos [2 (\lambda_p - \lambda_o)] \right]. \quad (1.1.8) \end{aligned}$$

Les trois termes de l'équation 1.1.8 permettent d'obtenir les principaux termes de génération de la marée. En effet, au cours d'une rotation de l'angle $(\lambda_p - \lambda_o)$ de 2π , c'est-à-dire une rotation de la Terre sur elle-même, le terme $\cos (2\varphi_o) \cos (2\varphi_p) \cos [2 (\lambda_p - \lambda_o)]$ effectue deux périodes, il décrit donc une fonction semi-diurne. Pendant la même durée, le terme $\sin (2\varphi_o) \sin (2\varphi_p) \cos (\lambda_p - \lambda_o)$ n'effectue qu'une seule période, décrivant donc une fonction diurne. Enfin, le terme $(1 - 3 \sin^2 \varphi_o) (1 - 3 \sin^2 \varphi_p)$ ne dépend que de la latitude, qui varie en fonction du mouvement de déclinaison de l'astre. La période de ce mouvement est très supérieure à une journée, il s'agit donc d'une fonction longue période.

1.1.2 Coefficient de charge et d'auto-attraction

Tant les continents que les océans sont soumis aux effets de l'attraction de la Lune et du Soleil. La réponse de l'océan à la sollicitation de la force génératrice d'origine astronomique induit une variabilité de la charge sur le plancher océanique. La réponse de la croûte terrestre est donc perturbée et des mouvements verticaux additionnels prennent naissance, influençant en retour la dynamique océanique. Il en résulte un potentiel qui peut-être décomposé en plusieurs harmoniques.

Soient :

- $\Pi_{lsa}(x, y, t)$ le coefficient de charge et d'auto-attraction (unité SI : $\text{m}^2 \text{s}^{-4}$), détaillé plus bas, $\Pi_{lsa} \in \mathbb{R}^+$;
- n_s le nombre d'harmonique du spectre considéré, $n_s \in \mathbb{N}^*$;
- k_i une constante de type nombre de LOVE³ pour l'harmonique i , $k_i \in \mathbb{R}$;
- ρ_t la masse volumique de la Terre (unité SI : kg m^{-3}), $\rho_t \in \mathbb{R}^+$;

3. Augustus Edward Hough LOVE (1863 - 1940)

- r_i le rapport des masses volumiques de l'eau et de la Terre décomposé selon chaque harmonique : $r_i = (3/2i+1) (\rho/\rho_t)$, $r_i \in \mathbb{R}^+$.

On peut alors définir :

$$\Pi_i^{lsa} = ghk_i r_i \quad (1.1.9)$$

et alors :

$$\Pi_{lsa} = \sum_{i=1}^{n_s} \Pi_i^{lsa}. \quad (1.1.10)$$

Une discussion plus complète de ce sujet peut être trouvée dans [Hendershott, 1972, Vincent, 1987].

1.1.3 Les courants marins

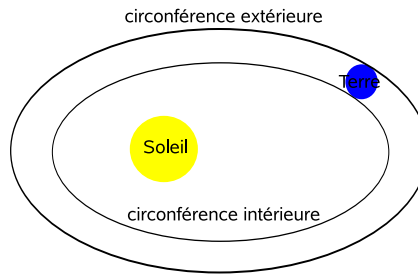


FIGURE 1.4 – *Circonvolution de la Terre autour du Soleil*

La Terre se déplace au cours de sa circonvolution entre deux lignes de circonférences formant une couronne dont l'écartement est le diamètre de la Terre, environ 12 756 km. Ceci nous amène à constater que la circonférence intérieure est plus courte que l'extérieure. Cette différence se traduit par 80 150 km en un an, soit environ 220 km par jour et un peu plus de 9 km h⁻¹. Il y a donc une différence de vitesse de déplacement dans l'espace entre l'intérieur et l'extérieur de la couronne, soit la face midi et la face minuit de notre globe terrestre. Cette différence est à l'origine des courants marins à contresens de la rotation le long de l'équateur.

Les forces à l'origine des marées sont donc bien connues : il s'agit pour l'essentiel de la force de la gravitation. Une approche mécanique, à laquelle on pourra ajouter une évolution de la densité de l'eau, permet donc de mettre en équations ces phénomènes.

1.2 Équations de NAVIER-STOKES

Sous les hypothèses énoncées, la mécanique des fluides montre que le système des océans est régit par les équations de NAVIER-STOKES, qui résultent de l'application des principes fondamentaux de la mécanique à un milieu continu. Soient (les vecteurs sont notés **gras**) :

- ρ la masse volumique du fluide (unité SI : kg m^{-3}). Cette quantité est nécessairement positive, donc $\rho \in \mathbb{R}^+$;
- $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{pmatrix}$ la vitesse eulerienne ⁴ d'une particule (unité SI : m s^{-1}). *A priori*, une particule peut se déplacer dans n'importe quelle direction, donc $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$;
- $\mathbf{\Omega}(x, y, z)$ le vecteur rotation de la Terre autour de son axe, c'est-à-dire le vecteur dont la direction est l'axe de rotation de la Terre, dont le sens est tel que la Terre tourne dans le sens direct et dont la longueur est la vitesse angulaire de la rotation (unité SI : s^{-1}). En fonction de la zone de la surface terrestre étudiée, le vecteur peut avoir diverses orientations, donc $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^3$;
- $\mathbf{g}(x, y, z)$ le vecteur d'accélération due à l'attraction terrestre (unité SI : m s^{-2}). En fonction de la zone de la surface terrestre étudiée, le vecteur peut avoir diverses orientations, donc $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$;
- $p(x, y, z, t)$ la pression interne (unité SI : Pa). La pression ne peut pas être négative, donc $p \in \mathbb{R}^+$;
- $\mathbf{\Psi}(x, y, z, t)$ la résultante des forces appliquées au système (unité SI : m s^{-2}), détaillée plus bas, $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{R}^3$;
- $s(x, y, z, t)$ la salinité (unité SI : $\mu\text{S cm}^{-1}$). La salinité ne peut pas être négative, donc $s \in \mathbb{R}^+$;
- $\theta(x, y, z, t)$ la température d'état (unité SI : K). 0 K est la valeur la plus petite possible, donc $\theta \in \mathbb{R}^+$;
- $\Theta(p, s, \theta)$ la température du système (unité SI : K). 0 K est la valeur la plus petite possible, donc $\Theta \in \mathbb{R}^+$;
- $c_p(p, \theta)$ la chaleur spécifique du système (unité SI : $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$), $c_p \in \mathbb{R}$;
- $k(x, y, z, t)$ la conductivité thermique (unité SI : W m K), $k \in \mathbb{R}$;
- \mathbf{F}^{rad} le flux de densité d'énergie radiative (unité SI : W m^{-2}), $\mathbf{F}^{rad} \in \mathbb{R}^3$;
- Q_H le taux de chaleur par unité de volume (unité SI : J kg^{-1}). Le système peut aussi bien perdre que gagner de la chaleur, donc $Q_H \in \mathbb{R}$;
- $\kappa_D(\Theta, p, s)$ la diffusivité (unité SI : $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$), $\kappa_D \in \mathbb{R}$.

Soit \mathbb{K}^n un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\{\mathbf{e}_i \in \mathbb{K}^n, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ la base canonique de cet espace et $\{x_i \in \mathbb{K}, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ les coordonnées d'un vecteur de cet espace selon cette base. On définit l'opérateur nabla (∇) ainsi :

$$\nabla = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et aura recours à sa restriction à trois dimensions :

$$\nabla_V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Notons \cdot l'opérateur du produit scalaire et \otimes celui du produit vectoriel.

4. C'est-à-dire la vitesse mesurée en un point constant du fluide, par opposition à la description lagrangienne de la vitesse, mesurée pour une particule donnée (ces deux descriptions sont équivalentes).

Au vu des forces dont nous avons fait l'inventaire et des hypothèses dans lesquelles nous nous plaçons, en appliquant les principes fondamentaux de la mécanique, en l'absence de terme puits – c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'échappement d'eau – et source – c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'apport d'eau, par exemple, on néglige l'influence des intempéries –, le système est décrit par le jeu d'équations suivant – pour plus de détails, voir par exemple [Chassaing, 2000a] :

1. conservation de la masse :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla_V \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2.1)$$

dans le cas d'un point matériel dans un milieu continu (voir par exemple [Gill, 1982]) :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_V \rho, \quad (1.2.2)$$

on a la relation de LEIBNIZ⁵ suivante (voir par exemple [Provost et Vallée, 2006]) :

$$\nabla_V \cdot \rho \mathbf{u} = \rho \nabla_V \cdot \mathbf{u} + \nabla_V \rho \cdot \mathbf{u},$$

donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_V \cdot \rho \mathbf{u} = 0 ; \quad (1.2.3)$$

2. conservation de la quantité de mouvement (équation du moment) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_V) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \otimes \mathbf{u} = -\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla_V p + \boldsymbol{\Psi} ; \quad (1.2.4)$$

3. équation de la chaleur :

$$\frac{\rho \Theta c_p}{\theta} \frac{D\theta}{Dt} = \nabla_V \cdot (k \nabla_V \Theta - \mathbf{F}^{rad}) + Q_H. \quad (1.2.5)$$

Ces trois équations étant une des formes des équations de NAVIER-STOKES pour les milieux en rotation. À cela, il faut ajouter :

4. l'équation de concentration :

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \nabla_V \cdot (\rho \kappa_D \nabla_V s) ; \quad (1.2.6)$$

5. et l'équation d'état :

$$\rho = \rho(p, s, \theta). \quad (1.2.7)$$

Du fait que l'eau est quasiment incompressible, on peut considérer que la masse volumique ne varie pas en fonction de la pression. L'équation d'état devient donc :

$$\rho = \rho(s, \theta). \quad (1.2.8)$$

Dans cette étude, nous nous intéressons principalement à l'élévation due à la marée et aux courants, de sorte qu'on se focalise sur les équations de conservations de la masse (1.2.3) et de la quantité de mouvement (1.2.4).

5. Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 - 1716)

1.3 Équations de SAINT-VENANT (*shallow water*)

Nous nous sommes principalement intéressés à la marée, cas dans lequel les profondeurs sont faibles par rapport à l'étendue des phénomènes considérés. Dans une première approche, nous pouvons donc nous placer dans l'hypothèse des ondes longues :

1. l'océan est un fluide incompressible, visqueux et newtonien⁶ ;
2. la pression est hydrostatique⁷.

De plus, on se place dans l'approximation de BOUSSINESQ⁸, qui indique que la masse volumique d'un fluide peut être considérée comme constante quand elle n'est pas multipliée par la gravité. Ceci permet de se focaliser sur la dynamique barotrope⁹. Cette approximation est raisonnable parce que l'on estime que l'échelle verticale de la dynamique considérée est beaucoup plus faible que celle de la variation de densité. L'équation 1.2.3 devient alors :

$$\nabla_V \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.3.1)$$

Pour T l'opérateur de transposée, posons $\mathbf{v} = (u, v)^T$. Prenons pour origine sur z la surface de l'océan à l'équilibre et orientons l'axe vers le haut. Soient :

- $h(x, y)$ la hauteur d'eau à l'équilibre (unité SI : m). Une hauteur d'eau ne peut pas être négative, donc $h \in \mathbb{R}^+$;
- $\eta(x, y, t)$ l'élévation de la surface libre au-dessus du niveau moyen de la mer (unité SI : m). La surface peut être aussi bien en dessous qu'au-dessus du niveau moyen, donc $\eta \in \mathbb{R}$;
- $H(x, y, t) = h(x, y) + \eta(x, y, t)$ la hauteur de la colonne d'eau selon la verticale (unité SI : m). Une hauteur d'eau ne peut pas être négative, donc $H \in \mathbb{R}^+$ (ce qui implique $\eta \in [-h; +\infty[$) ;
- $\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \bar{u}(x, y, t) \\ \bar{v}(x, y, t) \end{pmatrix}$ la vitesse moyennée sur la verticale (unité SI : m s^{-1}). $\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} \mathbf{v} dz$, donc $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$;
- $f_c(x, y)$ la norme de la contribution horizontale de la force de CORIOLIS¹⁰ (unité SI : m s^{-2}). Il s'agit de la norme d'un vecteur, donc $f_c \in \mathbb{R}^+$;
- \mathbf{k} le vecteur unitaire dirigé selon la verticale sortante ;
- $g(x, y) = \left\| \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} \mathbf{g}(x, y, z) dz \right\|$ (unité SI : m s^{-2}), $g \in \mathbb{R}^+$;
- $\bar{\Psi} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} \Psi dz$ (unité SI : m s^{-2}), $\bar{\Psi} \in \mathbb{R}^2$ et $\bar{\Psi}$ se décompose en plusieurs termes, détaillés plus bas.

Soit $S(x, y, z, t) = 0$ une surface, dans notre cas la surface de l'océan à l'interface avec le fond ou avec l'atmosphère. Dans notre étude, on considère qu'il n'y a ni gain ni perte d'eau par le fond des océans, ni non plus au niveau de l'atmosphère : on considère

6. Un fluide est dit newtonien si sa vitesse de déformation peut être considéré comme proportionnelle à la force de cisaillement qu'on lui applique.

7. La pression est dite hydrostatique si elle dépend uniquement de la profondeur.

8. Joseph Valentin BOUSSINESQ (1842 - 1929)

9. Barotrope : se dit d'un fluide dans lequel les surfaces de pressions constantes (isobares) sont parallèles à celles de densités constantes, par opposition à un fluide barocline.

10. Gaspard-Gustave CORIOLIS (1792 - 1843)

que ces deux surfaces sont imperméables. La condition d'imperméabilité s'écrit (voir par exemple [Gill, 1982]) :

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_V S = 0. \quad (1.3.2)$$

Au niveau de l'interface entre l'océan et le fond on a : $S(x, y, z = -h, t) = -h(x, y) - z$. Alors $\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t} = 0$ et :

$$\nabla_V S = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial x} \\ \frac{\partial S}{\partial y} \\ \frac{\partial S}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ -\frac{\partial h}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La condition d'imperméabilité 1.3.2 donne donc :

$$\frac{DS}{Dt} = \mathbf{u} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ -\frac{\partial h}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} = -u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} - w = 0,$$

soit, en notant la restriction à deux dimensions de nabra $\nabla_H = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)^T$:

$$w(x, y, z = -h, t) = \mathbf{v}(x, y, z = -h, t) \cdot \nabla_H h(x, y). \quad (1.3.3)$$

Au niveau de l'interface entre l'océan et l'atmosphère, on a $S(x, y, z = \eta, t) = \eta(x, y, t) - z$. Donc $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ et :

$$\nabla_V S = \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'après la condition d'imperméabilité 1.3.2 :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w = 0,$$

donc :

$$w(x, y, z = \eta, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, y, t) + \mathbf{v}(x, y, z = \eta, t) \cdot \nabla_H \eta(x, y, t). \quad (1.3.4)$$

D'après les propriétés des intégrales (voir par exemple [Provost et Vallée, 2006]) :

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{\eta} \nabla_V \cdot \mathbf{u} dz &= \int_{-h}^{\eta} \nabla_H \cdot \mathbf{v} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz \\
&= \nabla_H \cdot \int_{-h}^{\eta} \mathbf{v} dz - [\mathbf{v} \cdot \nabla_V S]_{z=-h}^{\eta} + [w]_{z=-h}^{z=\eta} \\
&= \nabla_H (H\bar{\mathbf{u}}) - \mathbf{v}(x, y, z = \eta, t) \cdot \nabla_H \eta(x, y, t) \\
&\quad + \mathbf{v}(x, y, z = -h, t) \cdot \nabla_H h(x, y) \\
&\quad + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v}(x, y, z = \eta, t) \cdot \nabla_H \eta(x, y, t) \\
&\quad - \mathbf{v}(x, y, z = -h, t) \cdot \nabla_H h(x, y) \\
&= \nabla_H (H\bar{\mathbf{u}}) + \frac{\partial \eta}{\partial t}.
\end{aligned}$$

D'après l'équation 1.3.1, on obtient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_H \cdot (H\bar{\mathbf{u}}) = 0. \quad (1.3.5)$$

On a $H(x, y, t) = h(x, y) + \eta(x, y, t)$, donc $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$, ce qui permet d'écrire l'équation de continuité ainsi :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla_H \cdot (H\bar{\mathbf{u}}) = 0. \quad (1.3.6)$$

De même, en intégrant l'équation 1.2.4 sur toute la colonne d'eau, on obtient l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_H) \bar{\mathbf{u}} + f_c \mathbf{k} \otimes \bar{\mathbf{u}} = -g \nabla_H \eta + \bar{\Psi}. \quad (1.3.7)$$

Les équations de SAINT-VENANT (*shallow water*) se résument donc au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_H \cdot (H\bar{\mathbf{u}}) = 0, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_H) \bar{\mathbf{u}} + f_c \mathbf{k} \otimes \bar{\mathbf{u}} = -g \nabla_H \eta + \bar{\Psi}. \end{cases} \quad (1.3.8)$$

1.4 Équations d'ondes

Dans cette étude, nous avons opté pour l'approche de [Lynch et Gray, 1979], consistant à résoudre les équations de SAINT-VENANT en les exprimant sous la forme d'une équation d'onde.

En multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement 1.3.7 par H , on obtient :

$$\begin{aligned} & H \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + H (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_H) \bar{\mathbf{u}} + H f_c \mathbf{k} \otimes \bar{\mathbf{u}} + H g \nabla_H \eta - H \bar{\Psi} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial H \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \bar{\mathbf{u}} \frac{\partial H}{\partial t} + H (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_H) \bar{\mathbf{u}} + H f_c \mathbf{k} \otimes \bar{\mathbf{u}} + H g \nabla_H \eta - H \bar{\Psi} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial H \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \bar{\mathbf{u}} \frac{\partial \eta}{\partial t} + H (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_H) \bar{\mathbf{u}} + f_c \mathbf{k} \otimes H \bar{\mathbf{u}} + H g \nabla_H \eta - H \bar{\Psi} = 0, \end{aligned}$$

d'après l'équation de continuité 1.3.6 :

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{\partial H \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \nabla_H \cdot (H \bar{\mathbf{u}}) + H (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_H) \bar{\mathbf{u}} + f_c \mathbf{k} \otimes H \bar{\mathbf{u}} + H g \nabla_H \eta - H \bar{\Psi} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial H \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla_H (H \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) + f_c \mathbf{k} \otimes H \bar{\mathbf{u}} + H g \nabla_H \eta - H \bar{\Psi} = 0, \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{\partial H \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla_H (H \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) + H (g \nabla_H \eta - \bar{\Psi}) + f_c \mathbf{k} \otimes H \bar{\mathbf{u}} = 0. \quad (1.4.1)$$

En dérivant l'équation 1.3.5 par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \nabla_H \cdot \left(\frac{\partial H \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) = 0,$$

la valeur de $\frac{\partial H \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}$ est donnée par l'équation 1.4.1, ce qui donne l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \nabla_H \cdot \left[H (\bar{\Psi} - g \nabla_H \eta) - \nabla_H (H \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) - f_c \mathbf{k} \otimes H \bar{\mathbf{u}} \right] = 0. \quad (1.4.2)$$

La formulation est alors formellement implicite : il n'apparaît plus de dérivée en temps de la vitesse.

Notons $\Delta = \nabla_H \cdot \nabla_H = \nabla_H^2$ l'opérateur laplacien à deux dimensions. L'équation 1.4.2 implique que l'on calcule la divergence de $\nabla_H \eta$, c'est-à-dire la divergence d'un gradient, soit un laplacien. Il apparait donc un terme de la forme $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g H \Delta \eta = 0$ (terme elliptique) dans l'équation 1.4.2, ce qui justifie l'appellation d'« équation d'onde ». L'apparition d'un laplacien permet de filtrer les hautes fréquences de petites longueurs d'ondes, c'est-à-dire le bruit numérique du modèle.

[Kinnmark et Gray, 1985] indiquent que l'équation d'onde 1.4.2 induit une perte d'information, qui peut entraîner une dérive linéaire de la masse en temps. Pour pallier à ce problème, on contraint l'équation 1.4.2 avec un rappel vers l'équation de continuité 1.3.5. Soit $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$ une constante de fréquence arbitraire, avec typiquement $\tau_0 = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, ce rappel se formalise par l'équation d'onde généralisée (1.4.2) + τ_0 (1.3.5). Posons :

$$\phi = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_H \cdot (H \bar{\mathbf{u}}), \quad (1.4.3)$$

l'équation de continuité 1.3.6 s'écrit alors ainsi :

$$\phi = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \tau_0 \phi &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \nabla_H \cdot \left(\frac{\partial H \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) + \tau_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \tau_0 \nabla_H \cdot (H \bar{\mathbf{u}}) \\ &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \tau_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_H \cdot \left(\frac{\partial H \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tau_0 H \bar{\mathbf{u}} \right),\end{aligned}$$

donc, d'après l'équation 1.4.1 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \tau_0 \phi &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \tau_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_H \cdot \left[\tau_0 H \bar{\mathbf{u}} - \nabla_H (H \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) - H (g \nabla_H \eta - \bar{\Psi}) - f_c \mathbf{k} \otimes H \bar{\mathbf{u}} \right] \\ &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \tau_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_H \cdot \left[H (\tau_0 \bar{\mathbf{u}} + \bar{\Psi} - g \nabla_H \eta) - \nabla_H (H \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) - f_c \mathbf{k} \otimes H \bar{\mathbf{u}} \right]\end{aligned}$$

et l'équation d'onde généralisée s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \tau_0 \phi = 0. \quad (1.4.4)$$

Dans cette étude, nous avons utilisé $\tau_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (voir chapitre 3), de sorte que la fréquence propre est équivalente à celle de la marée dans le domaine. Ainsi, les deux termes de l'équation 1.4.4 ont le même ordre de grandeur. Le lecteur intéressé à une discussion plus approfondie sur τ_0 pourra se référer à [Kinnmark et Gray, 1985, Werner et Lynch, 1986].

L'équation 1.4.4 est une équation différentielle du premier ordre, donc, pour $c_0 \in \mathbb{R}_*^+$, elle admet une solution de la forme $\phi = c_0 e^{-\tau_0 t}$. En conséquence, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi = 0$, ce qui assure la cohérence avec l'équation de continuité : l'équation d'onde généralisée garantie la conservation de la masse en moyenne, ce qui est parfaitement satisfaisant pour les phénomènes étudiés dans les chapitres 3 et 4.

Il est parfois reproché à l'équation d'onde généralisée d'avoir une formulation instable lorsque les termes non-linéaires sont importants. Ce problème n'a cependant pas été mis en évidence dans les applications que nous avons abordées.

1.5 Les forces exercées sur le système

Soient :

- $\mathbf{F}(x, y, t)$ le vecteur résultant des forçages (unité SI : m s^{-2}), tels que les forces génératrices de la marée ou la pression atmosphérique de surface, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^2$;
- $\mathbf{D}(x, y, t)$ le vecteur résultant des termes de dissipation (unité SI : m s^{-2}), tels que la friction de fond et le moment de diffusion horizontal, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^2$.

On a alors :

$$\bar{\Psi} = \mathbf{F} + \mathbf{D}. \quad (1.5.1)$$

Soient k_2 et h_2 les nombres de LOVE du deuxième ordre, $(k_2, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Ce sont des grandeurs adimensionnelles, qui décrivent la réponse élastique de la croûte terrestre au

potentiel générateur des marées et sont déterminées par des mesures géophysiques (voir [Kozai, 1968]). Alors :

$$\mathbf{F} = g(1 + k_2 - h_2)\nabla_H \Pi_a + g\nabla_H \Pi_{lsa}. \quad (1.5.2)$$

Soient :

- k_h le coefficient de diffusion horizontale (unité SI : $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$), $k_h \in \mathbb{R}^+$ (voir [Smagorinsky, 1963]) ;
- $\tau_b(x, y, t)$ le coefficient de dissipation sur le fond (unité SI : N m^{-2}), $\tau_b \in \mathbb{R}^2$, sujet d'une étude détaillée au chapitre 3 ;
- \mathbf{F}_{ws} la tension du vent (unité SI : N m^{-2}), $\mathbf{F}_{ws} \in \mathbb{R}^2$, détaillée plus bas ;
- C_W le coefficient de trainée (unité SI : $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$), $C_W \in \mathbb{R}^+$, détaillé plus bas.

Alors :

$$\mathbf{D} = (\nabla_H \cdot k_H \nabla_H) \bar{\mathbf{u}} - \frac{1}{H} \tau_b - \frac{1}{H} \mathbf{F}_{ws} - C_W (\nabla_H H \cdot \bar{\mathbf{u}}) \nabla_H H. \quad (1.5.3)$$

Posons :

- C_{ws} le coefficient de frottement dû au vent, dépendant des conditions climatiques, il est adimensionnel et $C_{ws} \in \mathbb{R}^+$;
- $\mathbf{u}_{ws}(x, y)$ la vitesse du vent à la surface (unité SI : m s^{-1}), $\mathbf{u}_{ws} \in \mathbb{R}^2$.

Alors :

$$\mathbf{F}_{ws} = C_{ws} \|\mathbf{u}_{ws}\| \mathbf{u}_{ws}. \quad (1.5.4)$$

Cependant, dans cette étude, nous nous sommes concentrés sur la marée, sur laquelle l'influence du vent peut être négligée. Pour une discussion détaillée du forçage atmosphérique et son intégration dans un modèle d'océan, voir [Carrère, 2003, Carrère et Lyard, 2003].

Soient :

- ρ_0 la densité moyenne (unité SI : kg m^{-3}), $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$;
- N la fréquence de flottabilité, dite fréquence de BRUNT-VÄISÄLÄ, donnant une mesure de la stabilité du fluide (unité SI : s^{-1}). Il s'agit d'une fréquence, donc $N \in \mathbb{R}^+$;
- K_e l'inverse de la distance d'excursion, qui permet de faire l'analogie entre un fluide oscillant contre une pente et un flux passant sur un fond ayant des variations périodiques (unité SI : m^{-1}). Il s'agit d'une longueur d'onde, donc $K_e \in \mathbb{R}^+$;
- c un coefficient adimensionnel d'ajustement, $c \in \mathbb{R}^+$.

Alors, le coefficient de trainée se définit ainsi :

$$C_W = c \frac{\rho_0 N}{2H K_e}. \quad (1.5.5)$$

Pour une discussion plus approfondie sur le coefficient de trainée, voir [Gill, 1982].

1.6 Conditions aux limites

Soient \mathcal{O} le domaine de simulation et Γ ses frontières. \mathcal{O} est le domaine de simulation, partant des côtes jusqu'à la pleine-mer après avoir dépassé la jonction entre le plateau

continental et le domaine abyssal. Les équations de NAVIER-STOKES s'appliquent à l'intérieur de \mathcal{O} . Il reste à définir les conditions aux limites. Notons Γ_c les côtes et Γ_o la frontière (nécessairement arbitraire) avec la pleine-mer : $\Gamma = \Gamma_c \cup \Gamma_o$.

L'équation 1.3.7 implique une dépendance entre $\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}$ et $\nabla \eta$. Pour éviter de sur-déterminer le problème, il faut donc fixer les conditions aux limites pour l'une ou l'autre des variables uniquement, la valeur de la variable non fixée en découlant. Dans notre étude, nous avons imposé les conditions aux limites sur $\bar{\mathbf{u}}$ au niveau des côtes, car c'est la variable naturelle sur laquelle imposer la condition d'imperméabilité. Au contraire, au niveau de la frontière ouverte, nous avons imposé les conditions aux limites sur η , car les bases de données globale donnent des informations sur cette variable et non sur les vitesses.

Soient :

- $\mathbf{n}(x, y)$ un vecteur unitaire normal à la frontière au point considéré et dirigé vers l'extérieur du domaine ;
- $\eta_b(x, y, t)$ l'élévation provenant de bases de données (unité SI : m), $\eta_b \in \mathbb{R}$;
- $\bar{\mathbf{u}}_b(x, y, t)$ la vitesse provenant d'analyses (unité SI : m s^{-1}), $\bar{\mathbf{u}}_b \in \mathbb{R}^2$.

Sur Γ_c , on considère qu'il y a une absence de flux à travers la frontière, qui est rigide. On définit donc une condition d'imperméabilité (voir [Gill, 1982]) :

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.6.1)$$

Pour Γ_o , T-UGOm propose deux types de conditions :

1. *condition de DIRICHLET*¹¹ :

$$\eta = \eta_b ; \quad (1.6.2)$$

2. *condition de FLATHER*. Issue de la méthode des caractéristiques, elle assure la continuité des invariants de RIEMANN le long des courbes caractéristiques selon la normale à la frontière (voir [Flather, 1976]) :

$$\eta = \eta_b + \sqrt{\frac{H}{g}} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_b) \cdot \mathbf{n}. \quad (1.6.3)$$

La condition de FLATHER nécessite des informations sur les courants (c'est-à-dire les vitesses), lorsque les bases de données ne donnent que des informations sur l'élévation. Ces conditions ne peuvent donc être utilisées qu'après une première analyse du modèle. Soit $t_f \in \mathbb{R}$ le temps au bout duquel est effectuée la première analyse. Dans notre étude, pour $t < t_f$, nous avons utilisé la condition de DIRICHLET et pour $t \geq t_f$, nous avons utilisé la condition de FLATHER. Comme base de données, nous avons eu recours à la solution globale FES2004 (voir [Lyard *et al.*, 2006]).

On trouvera une discussion approfondie sur les conditions aux limites pour les frontières ouvertes dans [Blayo et Debreu, 2005, Marsaleix *et al.*, 2006].

11. Johann Peter Gustav Lejeune DIRICHLET (1805 - 1859)

1.7 Formulation variationnelle

En résumé, nous avons donc à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \tau_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_H \cdot \left[H \left(\bar{\Psi} + \tau_0 \bar{\mathbf{u}} - g \nabla_H \eta \right) \right. \\ \quad \left. - \nabla_H (H \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) - f_c \mathbf{k} \otimes H \bar{\mathbf{u}} \right] = 0 & \text{sur } \mathcal{O} \times [0; +\infty[, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_H) \bar{\mathbf{u}} + f_c \mathbf{k} \otimes \bar{\mathbf{u}} + g \nabla_H \eta - \bar{\Psi} = 0 & \text{sur } \mathcal{O} \times [0; +\infty[, \\ \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_c \times [0; +\infty[, \\ \eta - \eta_b = 0 & \text{sur } \Gamma_o \times [0; t_f[, \\ (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_b) \cdot \mathbf{n} - \sqrt{\frac{g}{H}} (\eta - \eta_b) = 0 & \text{sur } \Gamma_o \times [t_f; +\infty[. \end{array} \right. \quad (1.7.1)$$

Pour résoudre le système 1.7.1, nous avons recours à la méthode des éléments finis. Ceci demande d'exprimer le système dans un espace de fonctions de type SOBOLEV¹². Soit E_1 et E_2 deux ensembles, notons $E_1 \setminus E_2$ l'ensemble E_1 privé des éléments de E_2 et $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On rappelle les définitions de théorie de la mesure suivantes (voir par exemple [Krée, 1997]) :

Définition 1.7.1. On appelle anneau booléen sur un ensemble X une famille \mathcal{B} de parties de X ayant les deux propriétés suivantes :

1. $\emptyset \in \mathcal{B}$;
2. $(B, B') \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \Rightarrow (B \cup B', B \setminus B') \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

On dit qu'un anneau booléen a une unité si $X \in \mathcal{B}$.

Définition 1.7.2. L'addition de \mathbb{R}^+ est prolongée à $\bar{\mathbb{R}}^+$ en convenant que, $\forall a \in \mathbb{R}^+$, $+\infty + a = a + (+\infty) = +\infty$ et $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

Définition 1.7.3. L'ensemble $\text{Mes}(\mathcal{B})$ des mesures sur un anneau booléen \mathcal{B} est l'ensemble des applications $m: \mathcal{B} \mapsto \bar{\mathbb{R}}^+$ ayant les propriétés suivantes :

1. $m(\emptyset) = 0$;
2. $\forall (X_1, X_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ tels que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $m(X_1 \cup X_2) = m(X_1) + m(X_2)$;
3. $\forall (B, \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ tels que, $\forall (i_1, i_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $i_1 < i_2$, $B_{i_1} \subset B_{i_2}$, $\lim_{i \rightarrow +\infty} B_i = B \Rightarrow m(B_{i_1}) < m(B_{i_2})$ et $\lim_{i \rightarrow +\infty} m(B_i) = m(B)$.

Définition 1.7.4. Une tribu sur un ensemble X est un anneau booléen \mathcal{T} avec unité sur X qui a la propriété de stabilité par union des suites croissantes :

$$\forall \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{T} \text{ et } \forall (i_1, i_2) \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } i_1 < i_2, B_{i_1} \subset B_{i_2} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} B_i \in \mathcal{T}.$$

Le couple (X, \mathcal{T}) est appelé un espace mesurable.

12. Sergueï Lvovitch SOBOLEV 1908 - 1989

La tribu \mathcal{T} est souvent sous-entendue. Les éléments de cette tribu sont appelés les parties mesurables de X .

Définition 1.7.5. Soient X et Y deux espaces mesurables non vide. Une application $f: X \mapsto Y$ est dite mesurable si l'image inverse par f de toute partie mesurable de Y est une partie mesurable de X .

Pour tout espace $E \subset \mathbb{K}^n$ mesurable, notons (voir [Brezis, 1999]) :

$$L^2(E) = \left\{ \psi: E \mapsto \mathbb{K}, \psi \text{ mesurable sur } E \text{ et } \int_E |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty \right\}, \quad (1.7.2)$$

$$\mathcal{H}^1(E) = \left\{ \psi \in L^2(E) \text{ et } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \in L^2(E) \right\}. \quad (1.7.3)$$

$\forall \psi \in \mathcal{H}^1(E)$, on peut définir une distribution $T_\psi \in \mathcal{D}' - \mathcal{D}'$ est l'espace des distributions, voir [Schwartz, 1998] – et, $\forall A \subseteq E$ mesurable, on notera :

$$\forall f \in \mathcal{H}^1(E), \langle T_\psi, f \rangle_A = \langle \psi, f \rangle_A = \int_A f(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.7.4)$$

Enfin, pour toute fonction $g: E \mapsto \mathbb{K}$, on notera $g|_A$ la restriction de g sur le sous-espace A . Le système 1.7.1 peut donc s'écrire sous la forme variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{H}^1(\mathcal{O}), \\ \left\langle \varphi, \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \tau_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_H \cdot \left[H \left(\overline{\Psi} + \tau_0 \overline{\mathbf{u}} - g \nabla_H \eta \right) - \nabla_H (H \overline{\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{u}}) - f_c \mathbf{k} \otimes h \overline{\mathbf{u}} \right] \right\rangle_{\mathcal{O}} \\ + \left\langle \varphi, \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla_H) \overline{\mathbf{u}} + f_c \mathbf{k} \otimes \overline{\mathbf{u}} + g \nabla_H \eta - \overline{\Psi} \right\rangle_{\mathcal{O}} + \langle \varphi, \overline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_c} \\ + \langle \varphi, \eta - \eta_b \rangle_{\Gamma_o} \Big|_{t \in [0; t_f[} + \left\langle \varphi, (\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}}_b) \cdot \mathbf{n} - \sqrt{\frac{g}{H}} (\eta - \eta_b) \right\rangle_{\Gamma_o} \Big|_{t \in [t_f; +\infty[} = 0. \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

D'après le théorème 2.1 de [Lions, 1996], pour des conditions aux limites de type DIRICHLET, il existe une unique solution à l'équation 1.7.5. Ce résultat est valable pour les conditions de type DIRICHLET en général, or la condition de FLATHER est de type DIRICHLET (elle ne fait pas intervenir de dérivée). L'équation 1.7.5 a donc bien une unique solution. De plus, d'après le théorème 2.7 de [Lions, 1996], l'équation 1.7.5 a la même solution que le système 1.7.1 si une telle solution existe.

Pour plus de détail sur les problèmes mathématiques soulevés par les équations de la mécanique des fluides, le lecteur pourra se référer à [Lions, 1996, Lions, 1998].

1.8 Discrétisation

Nous avons donc montré que l'équation d'onde admet une solution unique et que, exprimée sous forme variationnelle, cette solution reste la même. Cependant, il n'est

pas envisageable de déterminer cette solution de manière analytique. Nous cherchons donc la solution sur un nombre fini de points (le « maillage » ou la « grille »), pour ensuite interpoler cette solution en tous points du domaine : il s'agit de la discrétisation de la solution. Pour cela, nous avons eu recours à la méthode de GALERKIN (voir [Lucquin et Pironneau, 1996]).

On établit sur l'espace \mathcal{O} un maillage composé de $N_\delta \in \mathbb{N}^*$ éléments $(T_k)_{k \in \llbracket 1; N_\delta \rrbracket}$, avec $\delta \in \mathbb{R}^+$ la taille d'un élément du maillage – le maillage étant non-structuré, cette taille varie pour chaque élément en fonction de la direction –, $\lim_{\delta \rightarrow 0} N_\delta = +\infty$. Soit $\mathcal{O}_\delta = \bigcup_{k=1}^{N_\delta} T_k$, on a :

$$\mathcal{O}_\delta \subset \mathcal{O}$$

et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{O}_\delta = \mathcal{O}.$$

Posons :

$$\mathcal{H}_\delta^1(\mathcal{O}_\delta) = \left\{ \varphi_\delta : \mathcal{O}_\delta \mapsto \mathbb{R}, \varphi_\delta \text{ continue sur } \mathcal{O}_\delta \right. \\ \left. \text{et } \forall k \in \llbracket 1; N_\delta \rrbracket, \varphi_\delta|_{T_k} \text{ fonction affine} \right\}. \quad (1.8.1)$$

On a $\mathcal{H}_\delta^1(\mathcal{O}_\delta) \subset \mathcal{H}^1(\mathcal{O}_\delta)$. Notons Γ_c^δ et Γ_o^δ les frontières de \mathcal{O}_δ correspondants respectivement à Γ_o et Γ_c . La formulation variationnelle peut alors être discrétisée ainsi :

$$\forall \varphi_\delta \in \mathcal{H}_\delta^1(\mathcal{O}_\delta), \\ \left\langle \varphi_\delta, \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \tau_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_H \cdot \left[H \left(\overline{\Psi} + \tau_0 \overline{\mathbf{u}} - g \nabla_H \eta \right) - \nabla_H (H \overline{\mathbf{u}} \cdot \overline{\mathbf{u}}) - f_c \mathbf{k} \otimes h \overline{\mathbf{u}} \right] \right\rangle_{\mathcal{O}_\delta} \\ + \left\langle \varphi_\delta, \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla_H) \overline{\mathbf{u}} + f_c \mathbf{k} \otimes \overline{\mathbf{u}} + g \nabla_H \eta - \overline{\Psi} \right\rangle_{\mathcal{O}_\delta} + \langle \varphi_\delta, \overline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_c^\delta} \\ + \langle \varphi_\delta, \eta - \eta_b \rangle_{\Gamma_o^\delta} \Big|_{t \in [0; t_f[} + \left\langle \varphi_\delta, (\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}}_b) \cdot \mathbf{n} - \sqrt{\frac{g}{H}} (\eta - \eta_b) \right\rangle_{\Gamma_o^\delta} \Big|_{t \in [t_f; +\infty[} = 0. \quad (1.8.2)$$

Lorsque $\delta \rightarrow 0$, l'équation 1.8.2 admet exactement la même solution que l'équation 1.7.5 : l'équation 1.8.2 est une approximation de l'équation 1.7.5 sur \mathcal{O}_δ .

On peut donc résoudre sur chaque élément de maillage l'équation 1.8.2 en ayant recours à une linéarisation. Lorsque cette étude a débuté, T-UGOm proposait la discrétisation $P_1 - P_1$, c'est-à-dire des triangles sur lesquels on détermine l'élévation et la vitesse aux sommets (voir figure 1.5a), ainsi que la discrétisation $^{NC}P_1 - P_1$, c'est-à-dire des triangles sur lesquels on détermine l'élévation aux sommets du triangles et la vitesses aux centres des arêtes du triangle (voir figure 1.5b). Nous avons opté pour la discrétisation $P_1 - P_1$, qui offre de bonnes performances en termes de temps de calcul pour une précision parfaitement satisfaisante concernant les phénomènes étudiés (voir chapitre 3).

1.8.1 Résolution du maillage

Pour fixer la valeur de δ , on lui impose dans un premier temps d'être compris entre deux valeurs $\delta_{min} \in \mathbb{R}^+$ et $\delta_{max} \in \mathbb{R}^+$ de telle sorte que $\delta_{min} \leq \delta \leq \delta_{max}$. Soient :

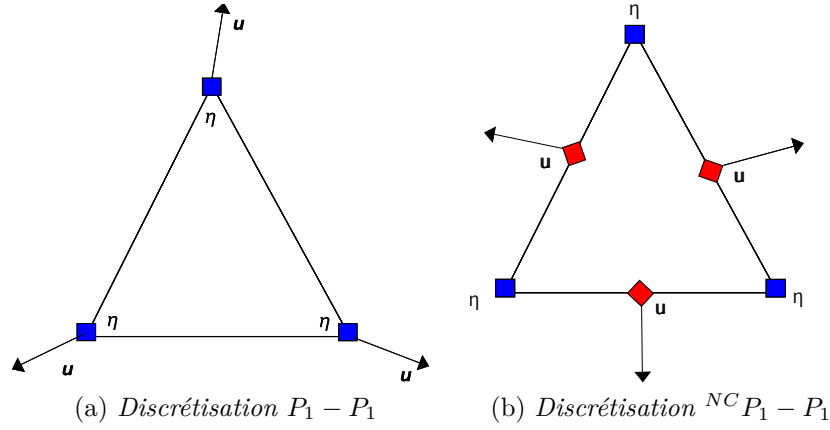


FIGURE 1.5 – Les deux types d'éléments disponibles

- λ la plus petite longueur d'onde du spectre de marée considéré (unité SI : m), $\lambda \in \mathbb{R}^+$;
- T la période de cette onde (unité SI : s), $T \in \mathbb{R}^+$;
- c la célérité de l'onde (unité SI : m s^{-1}), $c \in \mathbb{R}^+$ et $c = \sqrt{gH}$.

Alors $\lambda = cT$ et [Le Provost et Vincent, 1986] indiquent que $\delta \leq \lambda/15$ est un bon compromis entre précision et temps de calcul.

De plus, on impose un plus grand raffinement lorsque les gradients de bathymétrie, c'est-à-dire les dénivelés des fonds marins, deviennent plus importants. Soit ω la période de l'onde (unité SI : m^{-1}), alors $T = 2\pi/\omega$. Nous cherchons à établir un critère sur l'horizontale, nous pouvons donc nous focaliser sur la partie 1D des phénomènes. Définissons la longueur d'onde d'élévation locale λ_η (unité SI : m) ainsi :

$$\lambda_\eta = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Par extension, définissons une longueur d'onde de courant de marée locale λ_u (unité SI : m) :

$$\lambda_u = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}.$$

En se basant sur les équations simplifiées de la marée :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial H \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{cases}$$

et d'après l'équation de continuité 1.3.6 :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{u} \frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

Plaçons-nous dans l'hypothèse de non-divergence, c'est-à-dire que les dérivés par rapport au temps sont négligeables lorsque les gradients de topographie sont suffisamment importants. Alors $\frac{1}{\mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \equiv \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x}$ et :

$$\lambda_{\mathbf{u}} = \frac{2\pi}{H} \frac{\partial H}{\partial x}.$$

On cherchera donc à faire en sorte que le raffinement du maillage soit au plus égale à une certaine portion de $\lambda_{\mathbf{u}}$ et nous prenons une fois de plus $1/15$, ce qui donne :

$$\delta \leq \frac{2\pi}{15} \frac{\|\nabla_H H\|}{H}.$$

En conclusion, le critère de raffinement se définit ainsi :

$$\delta = \max \left[\delta_{\min}, \min \left(\delta_{\max}, \frac{T\sqrt{gH}}{15}, \frac{2\pi}{15} \frac{\|\nabla_H H\|}{H} \right) \right]. \quad (1.8.3)$$

Enfin, la précision du maillage est également forcée par la contrainte géométrique de la définition des traits de côtes et, dans T-UGOm, on s'assure que le ratio de changement de taille entre deux éléments consécutifs est inférieur à 1,5.

Le lecteur intéressé à une discussion plus complète sur les problématiques des maillages pourra se référer à [Frey et George, 1999].

1.8.2 Approximation sur le maillage

La plupart des termes de l'équation 1.8.2 peuvent être calculés à l'aide de formules de quadratures classiques (voir par exemple [Lucquin et Pironneau, 1996]). Cependant, il est nécessaire de déterminer la valeur du terme $(\nabla \cdot k_H \nabla \mathbf{u})$, potentiellement discontinu.

$\forall p \in [1; +\infty[$, on pose (voir par exemple [Brezis, 1999]) :

$$L^p(E) = \left\{ f : E \mapsto \mathbb{K} \text{ tel que } f \text{ mesurable sur } E \text{ et } \int_E |f|^p dx < +\infty \right\}. \quad (1.8.4)$$

On définit un multi-indice α comme la série $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ avec, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ et, $\forall \psi : E \mapsto \mathbb{K}^n$, on pose :

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{ et } D^\alpha \psi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \psi. \quad (1.8.5)$$

Notons, $\forall i \in \mathbb{N}$, $C^i(E)$ l'ensemble des fonctions i fois continûment différentiables sur E , $C^\infty(E) = \bigcap_{i \geq 0} C^i(E)$, $C_c(E)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur E et $C_c^\infty(E) = C^\infty(E) \cap C_c(E)$. $\forall m \in \mathbb{N}^*$ et $\forall p \in [1; +\infty[$, on défini :

$$W^{m,p}(E) = \left\{ f \in L^p(E) \text{ et } \forall \alpha \text{ un multi-indice avec } |\alpha| \leq m, \right. \\ \left. \exists g_\alpha \in L^p(E) \text{ tel que, } \forall \psi \in C_c^\infty(E), \right. \\ \left. \int_E f D^\alpha \psi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_E g_\alpha \psi dx \right\} \quad (1.8.6)$$

et on a : $\mathcal{H}^1(E) = W^{1,2}(E)$.

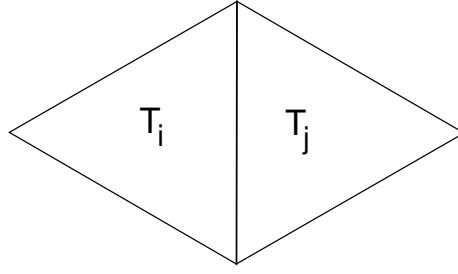


FIGURE 1.6 – Deux triangles voisins

Pour deux triangles voisins T_i et T_j (voir figure 1.6), $\forall \psi \in W^{m,p}(E)$ et $\forall \mathbf{f} \in [W^{m,p}(E)]^n$, posons :

$$\overline{\overline{\psi}}_{i,j} = \frac{1}{2} (\psi|_{T_i} + \psi|_{T_j}), \quad (1.8.7)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{f}}}_{i,j} = \frac{1}{2} (\mathbf{f}|_{T_i} + \mathbf{f}|_{T_j}). \quad (1.8.8)$$

$\forall \beta_{i,j} \in [0; 1]$ tels que $\beta_{j,i} = 1 - \beta_{i,j}$, posons :

$$\underline{\underline{\psi}}_{i,j} = \beta_{i,j} (\psi|_{T_j} - \psi|_{T_i}), \quad (1.8.9)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}}_{i,j} = \beta_{i,j} (\mathbf{f}|_{T_j} - \mathbf{f}|_{T_i}). \quad (1.8.10)$$

$\forall i \in [1; N_\delta]$ et $\forall j$ tels que $T_j \in \{\text{voisins de } T_i\}$, notons $\Gamma_{i,j}$ l'arête entre les triangles T_i et T_j et $\mathbf{n}_{i,j}$ le vecteur normal sur l'arête commune entre T_i et T_j , orienté de T_i à T_j . Par analogie avec la mesure de DIRAC¹³ (voir par exemple [Krée, 1997]), nous proposons :

$$\int_{\Gamma_{i,j}} \nabla \psi \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x} \approx \int_{\Gamma_{i,j}} \underline{\underline{\psi}}_{i,j} d\mathbf{x}, \quad (1.8.11)$$

$$\int_{\Gamma_{i,j}} \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} \approx \int_{\Gamma_{i,j}} \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x}. \quad (1.8.12)$$

Soit un espace X , on note $\overset{\circ}{X}$ l'intérieur de X , c'est-à-dire X privé de sa frontière (voir par exemple [Christol *et al.*, 1997]), alors :

$$\int_{\mathcal{O}_\delta} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N_\delta} \int_{\overset{\circ}{T_i}} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{N_\delta} \sum_{j: T_j \in \{\text{voisins de } T_i\}} \int_{\Gamma_{i,j}} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}. \quad (1.8.13)$$

On note $d\mathbf{x}$ la mesure telle que la mesure d'un élément est sa surface, la mesure des arêtes intérieures (où des problèmes de discontinuités peuvent avoir lieu) est la longueur des segments, tandis que la mesure des arêtes extérieures (où il n'y a pas de problème de

13. Paul Adrien Maurice DIRAC (1902 – 1984)

discontinuité) est nulle. Les frontières extérieures étant de mesures nulles, une intégrale sur une telle frontière est nulle, ce qui donne :

$$\int_{\mathcal{O}_\delta} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N_\delta} \int_{T_i} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{N_\delta} \sum_{\substack{j: T_j \in \{\text{voisins de } T_i\} \\ \text{et } \Gamma_{i,j} \text{ arête intérieure}}} \int_{\Gamma_{i,j}} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}. \quad (1.8.14)$$

À l'intérieur des éléments, les fonctions sont par construction continues, les termes $\int_{T_i} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}$ ne posent donc pas de problème. En revanche, les arêtes sont le lieu de discontinuités. En conséquence, déterminer les valeurs de $\int_{\Gamma_{i,j}} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}$ est problématique. Par analogie avec la méthode des différences finies (voir par exemple [Lucquin et Pironneau, 1996]), nous avons recours à l'approximation suivante :

$$\int_{\Gamma_{i,j}} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} \approx \int_{\Gamma_{i,j}} \bar{\bar{\psi}}_{i,j} \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x}, \quad (1.8.15)$$

donc, d'après les équations 1.8.14 et 1.8.15 :

$$\int_{\mathcal{O}_\delta} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^{N_\delta} \int_{T_i} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{N_\delta} \sum_{\substack{j: T_j \in \{\text{voisins de } T_i\} \\ \text{et } \Gamma_{i,j} \text{ arête intérieure}}} \int_{\Gamma_{i,j}} \bar{\bar{\psi}}_{i,j} \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x}. \quad (1.8.16)$$

Proposition 1.8.1. *On rappelle la formule de LEIBNIZ suivante (voir par exemple [Provost et Vallée, 2006]) :*

$$\forall \psi \in C^1 \text{ et } \forall \mathbf{f} \in [C^1]^n, \int_E \nabla \cdot \psi \mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_E \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_E \nabla \psi \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}.$$

L'approximation donnée par l'équation 1.8.15 est compatible avec la formule de LEIBNIZ :

$$\forall \psi \in C^1 \text{ et } \forall \mathbf{f} \in [C^1]^n, \int_{\mathcal{O}_\delta} \nabla \cdot \psi \mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}_\delta} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{O}_\delta} \nabla \psi \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}.$$

Démonstration. $\forall \psi \in W^{m,p}(\mathcal{O}_\delta \times \mathbb{R}^+)$ et $\forall \mathbf{f} \in [W^{m,p}(\mathcal{O}_\delta \times \mathbb{R}^+)]^n$. D'après l'approximation donnée par l'équation 1.8.15 :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}_\delta} \nabla \cdot \psi \mathbf{f} d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{N_\delta} \int_{T_i} \nabla \cdot \psi \mathbf{f} d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{N_\delta} \int_{T_i} \nabla \cdot \psi \mathbf{f} d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{N_\delta} \sum_{\substack{j: T_j \in \{\text{voisins de } T_i\} \\ \text{et } \Gamma_{i,j} \text{ arête intérieure}}} \int_{\Gamma_{i,j}} \nabla \cdot \psi \mathbf{f} d\mathbf{x} \\ &\approx \sum_{i=1}^{N_\delta} \int_{T_i} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{N_\delta} \int_{T_i} \nabla \psi \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_\delta} \sum_{\substack{j: T_j \in \{\text{voisins de } T_i\} \\ \text{et } \Gamma_{i,j} \text{ arête intérieure}}} \int_{\Gamma_{i,j}} \underline{\underline{\psi \mathbf{f}}}_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Or, $\forall i \in [1; N_\delta]$, ainsi que $\forall j$ tels que $T_j \in \{\text{voisins de } T_i\}$ et $\Gamma_{i,j}$ arête intérieure :

$$\int_{\Gamma_{i,j}} \psi \mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_{i,j}} \beta_{i,j} [(\psi \mathbf{f})|_{T_j} - (\psi \mathbf{f})|_{T_i}] \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x}$$

et :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{i,j}} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{i,j}} \nabla \psi \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} &\approx \int_{\Gamma_{i,j}} \bar{\psi}_{i,j} \underline{\mathbf{f}}_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{i,j}} \underline{\psi}_{i,j} \bar{\mathbf{f}}_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x} \\ &\approx \int_{\Gamma_{i,j}} \bar{\psi}_{i,j} \underline{\mathbf{f}}_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} + \underline{\psi}_{i,j} \bar{\mathbf{f}}_{i,j} \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x} \\ &\approx \int_{\Gamma_{i,j}} \frac{1}{2} (\psi|_{T_i} + \psi|_{T_j}) \beta_{i,j} (\mathbf{f}|_{T_j} - \mathbf{f}|_{T_i}) \cdot \mathbf{n}_{i,j} \\ &\quad + \beta_{i,j} (\psi|_{T_j} - \psi|_{T_i}) \frac{1}{2} (\mathbf{f}|_{T_i} + \mathbf{f}|_{T_j}) \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x} \\ &\approx \int_{\Gamma_{i,j}} \frac{\beta_{i,j}}{2} (\psi|_{T_i} \mathbf{f}|_{T_j} - \psi|_{T_i} \mathbf{f}|_{T_i} \\ &\quad + \psi|_{T_j} \mathbf{f}|_{T_j} - \psi|_{T_j} \mathbf{f}|_{T_i}) \cdot \mathbf{n}_{i,j} \\ &\quad + \frac{\beta_{i,j}}{2} (\psi|_{T_j} \mathbf{f}|_{T_i} + \psi|_{T_j} \mathbf{f}|_{T_j} \\ &\quad - \psi|_{T_i} \mathbf{f}|_{T_i} - \psi|_{T_i} \mathbf{f}|_{T_j}) \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x} \\ &\approx \int_{\Gamma_{i,j}} \beta_{i,j} (\psi|_{T_j} \mathbf{f}|_{T_j} - \psi|_{T_i} \mathbf{f}|_{T_i}) \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x} \\ &\approx \int_{\Gamma_{i,j}} \beta_{i,j} [(\psi \mathbf{f})|_{T_j} - (\psi \mathbf{f})|_{T_i}] \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\int_{\mathcal{O}_\delta} \nabla \cdot \psi \mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}_\delta} \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{O}_\delta} \nabla \psi \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}$$

□

Proposition 1.8.2. Notons Γ_E la frontière de E , $\mathbf{n}_{\Gamma_E}(\mathbf{x})$ le vecteur normal à Γ_E et dirigé vers l'extérieur de E au point \mathbf{x} de la frontière et $d\sigma(\mathbf{x})$ la mesure telle que la mesure d'un chemin est la longueur de ce chemin. On rappelle la formule de STOKES (voir par exemple [Doss-Bachelet et al., 2000]) :

$$\forall \mathbf{f} \in [C^1]^n, \int_E \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_E} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_E} d\sigma(\mathbf{x}).$$

L'approximation donnée par l'équation 1.8.15 est compatible avec la formule de STOKES :

$$\forall \mathbf{f} \in [W^{m,p}(\mathcal{O}_\delta \times \mathbb{R}^+)]^n, \int_{\mathcal{O}_\delta} \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} \approx \int_{\Gamma_{\mathcal{O}_\delta}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{\mathcal{O}_\delta}} d\sigma(\mathbf{x}).$$

Démonstration. $\forall \mathbf{f} \in [W^{m,p}(\mathcal{O}_\delta \times \mathbb{R}^+)]^n :$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{O}_\delta} \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{N_\delta} \int_{T_i} \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} \\
&= \sum_{i=1}^{N_\delta} \int_{T_i^\circ} \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{N_\delta} \sum_{\substack{j:T_j \in \{\text{voisins de } T_i\} \\ \text{et } \Gamma_{i,j} \text{ arête intérieure}}} \int_{\Gamma_{i,j} \times \mathbb{R}^+} \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} \\
&\approx \sum_{i=1}^{N_\delta} \sum_{j:T_j \in \{\text{voisins de } T_i\}} \int_{\Gamma_{i,j}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\sigma \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_\delta} \sum_{\substack{j:T_j \in \{\text{voisins de } T_i\} \\ \text{et } \Gamma_{i,j} \text{ arête intérieure}}} \int_{\Gamma_{i,j}} \mathbf{f}|_{\Gamma_{i,j}} \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Soit $N_f \in \mathbb{N}^+$ le nombre d'arêtes composant la frontière extérieure et en notant Γ_i la i^{e} arête extérieure. Sur les arêtes intérieures, on a $d\sigma(\mathbf{x}) = d\mathbf{x}$ et donc :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N_\delta} \sum_{j:T_j \in \{\text{voisins de } T_i\}} \int_{\Gamma_{i,j}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\sigma + \sum_{i=1}^{N_\delta} \sum_{\substack{j:T_j \in \{\text{voisins de } T_i\} \\ \text{et } \Gamma_{i,j} \text{ arête intérieure}}} \int_{\Gamma_{i,j}} \mathbf{f}|_{\Gamma_{i,j}} \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\mathbf{x} \\
&= \sum_{i=1}^{N_f} \int_{\Gamma_i} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_i} d\sigma + \sum_{i=1}^{N_\delta} \sum_{\substack{j:T_j \in \{\text{voisins de } T_i\} \\ \text{et } \Gamma_{i,j} \text{ arête intérieure}}} \int_{\Gamma_{i,j}} \mathbf{f}|_{T_i} \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\sigma \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_\delta} \sum_{\substack{j:T_j \in \{\text{voisins de } T_i\} \\ \text{et } \Gamma_{i,j} \text{ arête intérieure}}} \int_{\Gamma_{i,j}} \beta_{i,j} (\mathbf{f}|_{T_j} - \mathbf{f}|_{T_i}) \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\sigma
\end{aligned}$$

En nous plaçant sur une arête intérieure $\Gamma_{i,j}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\beta_{i,j} (\mathbf{f}|_{T_j} - \mathbf{f}|_{T_i}) \cdot \mathbf{n}_{i,j} + \beta_{j,i} (\mathbf{f}|_{T_i} - \mathbf{f}|_{T_j}) \cdot \mathbf{n}_{j,i} \\
&= \beta_{i,j} (\mathbf{f}|_{T_j} - \mathbf{f}|_{T_i}) \cdot \mathbf{n}_{i,j} - (1 - \beta_{i,j}) (\mathbf{f}|_{T_i} - \mathbf{f}|_{T_j}) \cdot \mathbf{n}_{i,j} \\
&= (\beta_{i,j} \mathbf{f}|_{T_j} - \beta_{i,j} \mathbf{f}|_{T_i} - \mathbf{f}|_{T_i} + \mathbf{f}|_{T_j} + \beta_{i,j} \mathbf{f}|_{T_i} - \beta_{i,j} \mathbf{f}|_{T_j}) \cdot \mathbf{n}_{i,j} \\
&= (\mathbf{f}|_{T_j} - \mathbf{f}|_{T_i}) \cdot \mathbf{n}_{i,j},
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N_\delta} \sum_{\substack{j:T_j \in \{\text{voisins de } T_i\} \\ \text{et } \Gamma_{i,j} \text{ arête intérieure}}} \int_{\Gamma_{i,j}} \beta_{i,j} (\mathbf{f}|_{T_j} - \mathbf{f}|_{T_i}) \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\sigma = \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N_\delta} \sum_{\substack{j:T_j \in \{\text{voisins de } T_i\} \\ \text{et } \Gamma_{i,j} \text{ arête intérieure}}} \int_{\Gamma_{i,j}} \mathbf{f}|_{T_i} \cdot \mathbf{n}_{i,j} d\sigma
\end{aligned}$$

et on a bien :

$$\int_{\mathcal{O}_\delta} \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^{N_f} \int_{\Gamma_i} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_i} d\sigma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_{\mathcal{O}_\delta}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{\mathcal{O}_\delta}} d\sigma(\mathbf{x}).$$

□

Les propositions 1.8.1 et 1.8.2 montre que l'approximation donnée par l'équation 1.8.15 est compatible avec les règles classiques de calcul intégral.

Proposition 1.8.3. Notons Γ_E la frontière de E et, $\forall \mathbf{x} \in \Gamma_E$, $\mathbf{n}_{\Gamma_E}(\mathbf{x})$ le vecteur unitaire normal à Γ_E et dirigé vers l'extérieur de E au point \mathbf{x} de la frontière. $\forall \psi \in W^{m,p}(E)$ et $\mathbf{f} \in [W^{m,p}(E)]^n$, on a :

$$\int_E \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_E} \psi \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_E} d\sigma - \int_E \nabla \psi \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}.$$

Démonstration. D'après la formule de LEIBNIZ :

$$\int_E \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_E \nabla \cdot \psi \mathbf{f} d\mathbf{x} - \int_E \nabla \psi \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}.$$

D'après la formule de STOKES :

$$\int_E \nabla \cdot \psi \mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_E} \psi \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_E} d\sigma,$$

donc :

$$\int_E \psi \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_E} \psi \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_E} d\sigma - \int_E \nabla \psi \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}.$$

et les propositions 1.8.1 et 1.8.2 montrent que cette démonstration reste vraie avec l'approximation donnée par l'équation 1.8.15. □

Nous avons donc une méthode pour calculer le terme $(\nabla \cdot k_H \nabla) \bar{\mathbf{u}}$. En effet :

$$(\nabla \cdot k_H \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \nabla \cdot k_H \nabla \bar{u} \\ \nabla \cdot k_H \nabla \bar{v} \end{pmatrix}$$

Les deux coordonnées de ce vecteur se traitent de manière symétrique. Posons $\mathbf{g}_1 = k_H \nabla \bar{u}$, donc $\nabla \cdot k_H \nabla \bar{u} = \nabla \cdot \mathbf{g}_1$. D'après la proposition 1.8.3 :

$$\int_{\mathcal{O}_\delta} \varphi_\delta \nabla \cdot \mathbf{g}_1 d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_{\mathcal{O}_\delta}} \varphi_\delta \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{\mathcal{O}_\delta}} d\sigma - \int_{\mathcal{O}_\delta} \nabla \varphi_\delta \cdot \mathbf{g}_1 d\mathbf{x},$$

donc :

$$\int_{\mathcal{O}_\delta} \varphi_\delta \nabla \cdot k_H \nabla \bar{u} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_{\mathcal{O}_\delta}} \varphi_\delta k_H \nabla \bar{u} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_{\mathcal{O}_\delta}} d\sigma - \int_{\mathcal{O}_\delta} \nabla \varphi_\delta \cdot k_H \nabla \bar{u} d\mathbf{x}$$

et nous avons vu comment calculer chacun de ces termes.

1.8.3 Discrétisation temporelle

Soit $\mathbf{U} = H\mathbf{u}$ le transport et $\gamma \in [0; 1]$. Au pas de temps $i \in \mathbb{N}$, on définit :

$$\Delta\eta^i = \eta^{i+1} - \eta^{i-1}.$$

Alors :

$$\eta^i \approx (1 - \gamma) \eta^i + \gamma \frac{\eta^{i+1} + \eta^{i-1}}{2} = \frac{\gamma}{2} \Delta\eta^i + (1 - \gamma) \eta^i + \gamma \eta^{i-1}$$

et :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} \varphi_\delta \frac{\partial \eta}{\partial t} - \int_{\Omega_\delta} \nabla \varphi_\delta \cdot H\mathbf{u} = \\ \int_{\Omega_\delta} \varphi_\delta \frac{\eta^{i+1} - \eta^{i-1}}{2\Delta t} - \int_{\Omega_\delta} \nabla \varphi_\delta \cdot \left[\frac{\gamma}{2} (\mathbf{U}^{i+1} + \mathbf{U}^{i-1}) + (1 - \gamma) \mathbf{U}^i \right] = 0. \end{aligned}$$

Lorsque $\gamma = 0$, le schéma est purement explicite et lorsque $\gamma = 1$, le schéma est purement implicite. Dans notre étude, nous avons pris $\gamma = 1/2$ (schéma centré).

Pour le reste, les traitements se font classiquement. Le lecteur intéressé par plus de détails concernant l'écriture d'un code d'éléments finis pourra se reporter à [Danaila *et al.*, 2003, Lucquin et Pironneau, 1996, Poncet, 1979].

1.9 Conclusion partielle

Ce chapitre nous a permis d'identifier les différents phénomènes qui entrent dans la mise en mouvement des océans, ainsi que de mettre en place une méthodologie, basée sur la méthode des éléments finis et des grilles non-structurées, pour les modéliser. Cependant, cette modélisation ne peut avoir de sens que confrontée à la réalité. Il importe donc de pouvoir collecter des données permettant de rassembler autant d'informations que possible sur les phénomènes étudiés.

Chapitre 2

Mesures de la dynamique des océans

Les bases théoriques posées dans le précédemment chapitre ne sont pas une fin en soi. Elles n'ont de valeur que si elles permettent d'expliquer et de prévoir les phénomènes hydrodynamiques. Pour cela, elles doivent être confrontées à des mesures. Le présent chapitre détail les types de mesures que l'on peut effectuer sur l'océan, ainsi que les différentes techniques mises en œuvre pour les traiter. Également, nous présentons les sources de données que nous avons utilisées.

Ce chapitre fait une présentation rapide des moyens de mesure mis en œuvre pour cette étude. Le lecteur soucieux de trouver une présentation plus complète pourra se référer à [Letellier, 2004, Simon, 2007, Sverdrup *et al.*, 1942].

Sommaire

2.1	Marégraphes	53
2.2	Altimétrie	54
2.3	Courantomètre	57
2.4	CTD	58
2.5	Campagnes de mesures	58
2.6	Analyse harmonique	60
2.7	Conclusion partielle	61

2.1 Marégraphes

Les mesures marégraphiques sont généralement données sous forme harmonique. Opérer pour une description harmonique de la marée permet de détacher les mesures de la marée avec le temps auquel elles ont été faites. En effet, les différentes ondes composants le spectre de la marée peuvent être considérées comme quasiment constantes dans le temps. Ainsi, les mesures peuvent être effectuées sur de longues périodes et moyennées, afin de limiter les impacts d'événements accidentels.

Il existe deux catégories de marégraphes : les marégraphes de surfaces et les marégraphes plongeurs.

La première catégorie de marégraphe est aussi historiquement la première à être apparue. Dans un premier temps, il s'agissait d'une simple échelle de référence, graduée à partir du fond. Un observateur venait régulièrement relever la hauteur de la surface à l'aide de cette échelle. Ceci pose des problèmes en terme de précision et de pérennité des mesures.

Pour pallier à ces problèmes, le système des marégraphes à flotteurs a été mis au point : un flotteur est plongé dans un puits de tranquillisation (afin de limiter l'influence de la houle). Par un système de poulies, la mesure de l'élévation de la surface est enregistrée sur une bande de papier qui se déroule au fil du temps.

Le dernier perfectionnement en date des marégraphes de surface consiste en les marégraphes numériques côtiers. Un transducteur est placé à la surface de l'eau et émet une impulsion, pour en capter le signal réfléchi. Le temps écoulé entre l'émission et la réception du signal est traduit en hauteur de la colonne d'eau. On effectue plusieurs mesures périodiquement, qui sont moyennées afin de limiter l'impact de la houle et du clapotis.

La deuxième catégorie est constituée de marégraphes à capteur de fond : un quartz dont la fréquence de vibration varie par effet piezo-électrique est placé au fond des océans. On obtient ainsi une mesure de la pression ambiante, caractéristique de la hauteur de la colonne d'eau surplombant le capteur, de la pression atmosphérique et de la température de l'eau. La mesure simultanée de ces deux derniers paramètres permet de déduire la hauteur de la colonne d'eau et donc l'élévation de marée.

L'Organisation hydrographique internationale¹ établit des recommandations afin que les mesures marégraphiques mondiales soient standardisées et veille à ce que les états membres rendent leurs mesures publiquement accessibles *via* Internet, ainsi que le fait par exemple le réseau d'observation Rosame².

Le Brésil fait partie de l'Organisation hydrographique internationale. En conséquence, la *Fundação de Estudos do Mar* (Femar), c'est-à-dire la marine brésilienne, met à disposition ses données marégraphiques, voir [Femar, 2000]. Pour accorder ses données aux autres données dont nous disposons, il a fallu ramener les phases mesurées à l'heure GMT, en appliquant un décalage de trois heures (voir chapitre 3).

1. <http://www.iho-ohi.net/>

2. <http://www.legos.obs-mip.fr/observations/rosame/>

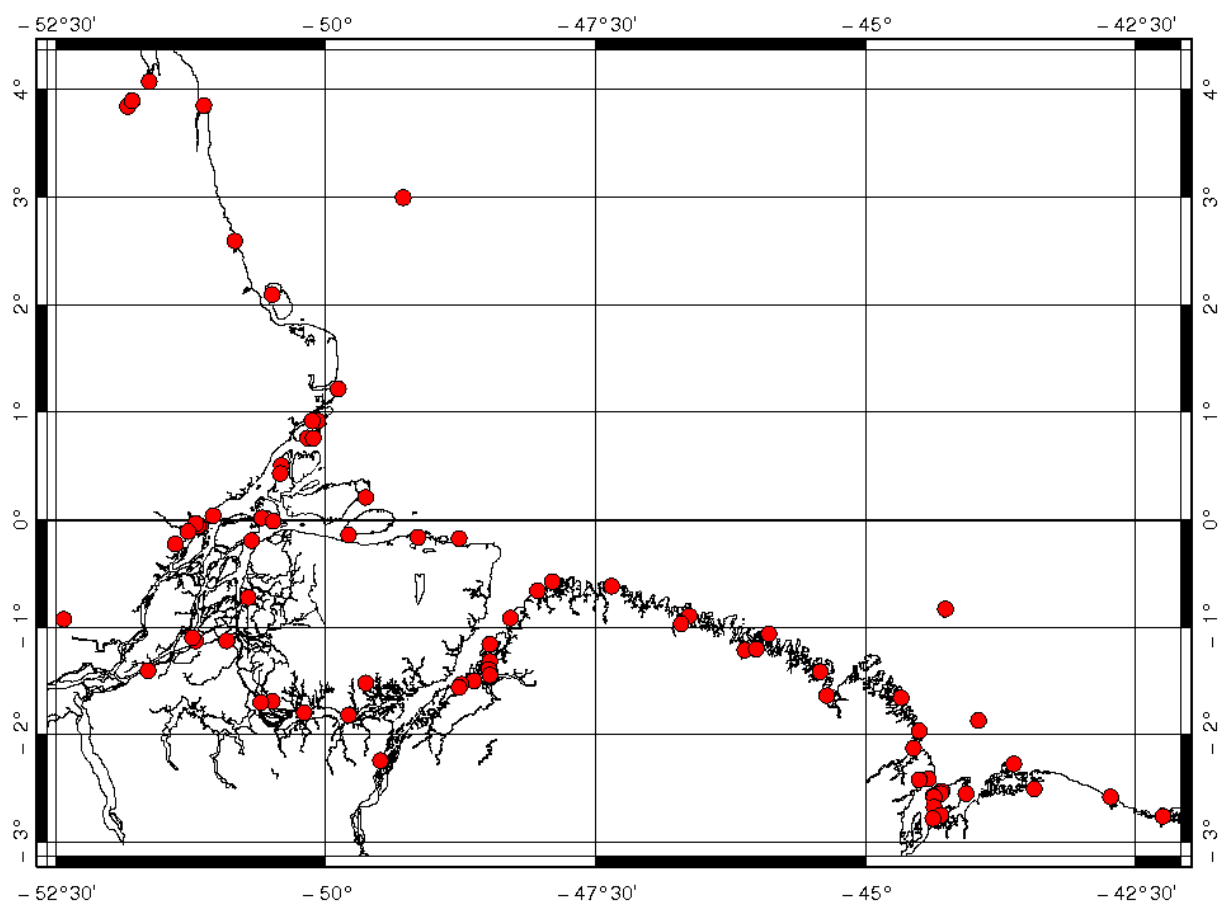


FIGURE 2.1 – Base de données marégraphique de la Femarn

La figure 2.1 présente le réseau marégraphique dans la région mis à disposition par la Femarn. Il s'agit d'un réseau côtier et estuarien : les observations entrent assez peu dans le fleuve. De plus, certaines analyses harmoniques ont été effectuées sur des séries temporelles très courtes (de l'ordre de la semaine), ce qui laisse planer un doute quant à la validité de certaines constantes.

2.2 Altimétrie

Depuis la décennie 1970, un nouveau type d'instrument de mesure permet l'observation des océans : les satellites. Le principe est simple : l'altimètre de bord du satellite émet une onde radar et capte l'onde réfléchie, ce qui permet de déterminer la distance qui le sépare de la surface de l'océan.

Si le principe est simple, sa mise en œuvre est complexe et nécessite notamment de déterminer avec précision ce que serait la position au repos des océans s'ils n'étaient soumis qu'à l'attraction terrestre (ce que l'on nomme le *geoïde*), ainsi que l'orbite du satellite. Le type d'altimètre a également une forte influence sur la qualité des mesures. Enfin, si les satellites présentent l'avantage de mesurer l'océan au large, la proximité

des côtes rend leurs mesures peu fiables. De plus, ils mettent un certain temps avant de revenir au même point, créant un phénomène d'alias. Le perfectionnement tant des satellites océanographiques que du traitement de leurs mesures sont l'objet d'une part significative de l'activité du Legos (voir par exemple [Le Hénaff, 2008]).

Dans cette étude, nous avons eu recours aux données fournies par les missions franco-américaines Topex/Poseidon et Jason.

Pour une étude détaillée de l'altimétrie et son apport dans les mesures océanographiques, voir [Fu et Cazenave, 2001].

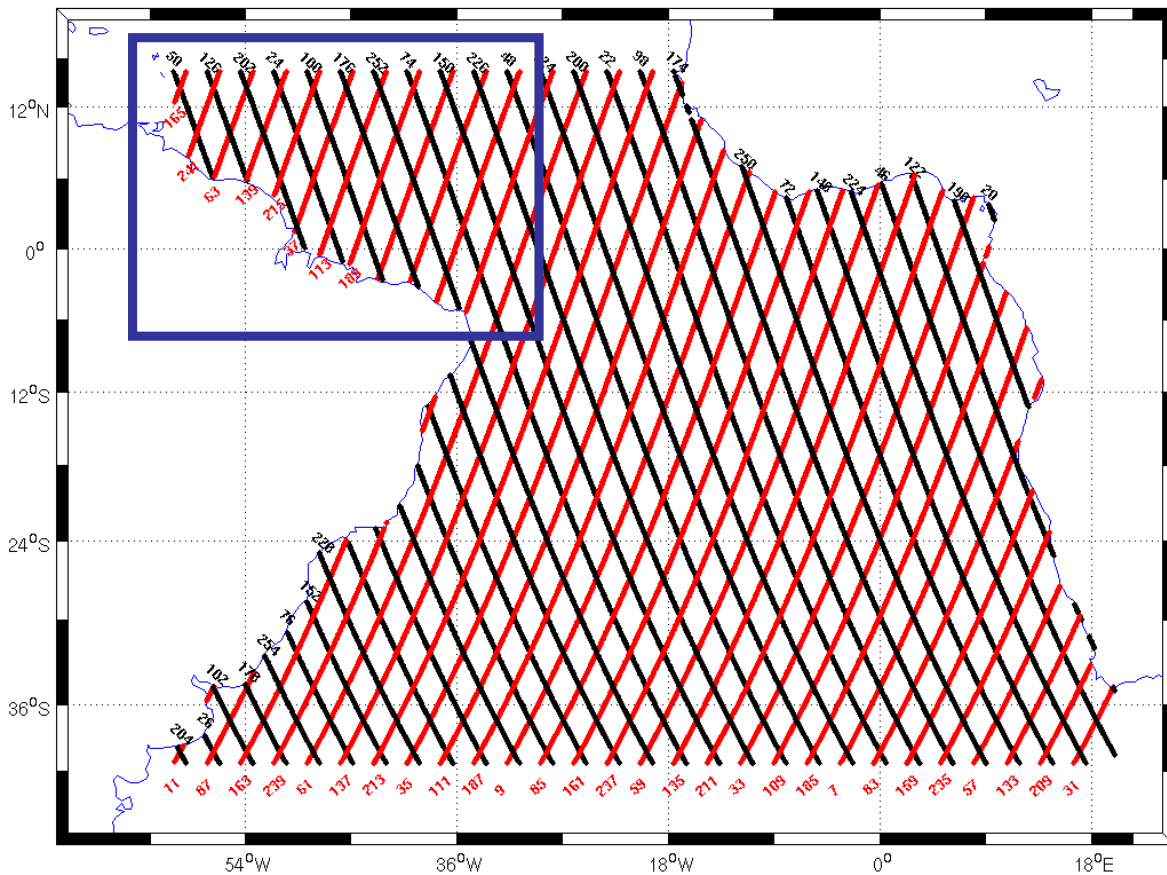


FIGURE 2.2 – *Traces altimétriques dans la zone atlantique sud et celles utilisées dans cette étude (dans le cadre bleu)*

En parallèle de cette étude, le service Ctoh³ – Centre de topographie des océans et de l'hydrosphère, Legos – a effectué un important travail pour améliorer le traitement des produits altimétriques, offrant notamment des données pour l'océanographie côtière par l'intermédiaire de la chaîne X-Track⁴ (voir [Roblou *et al.*, 2007]). Ce produit offre notamment des données altimétriques dans la zone atlantique sud (voir figure 2.2). Parmi

3. <http://ctoh.legos.obs-mip.fr/>

4. <http://ctoh.legos.obs-mip.fr/products/coastal-products/coastal-products>

ces données, nous nous sommes intéressés à celles contenues dans le cadre bleu dans la figure.

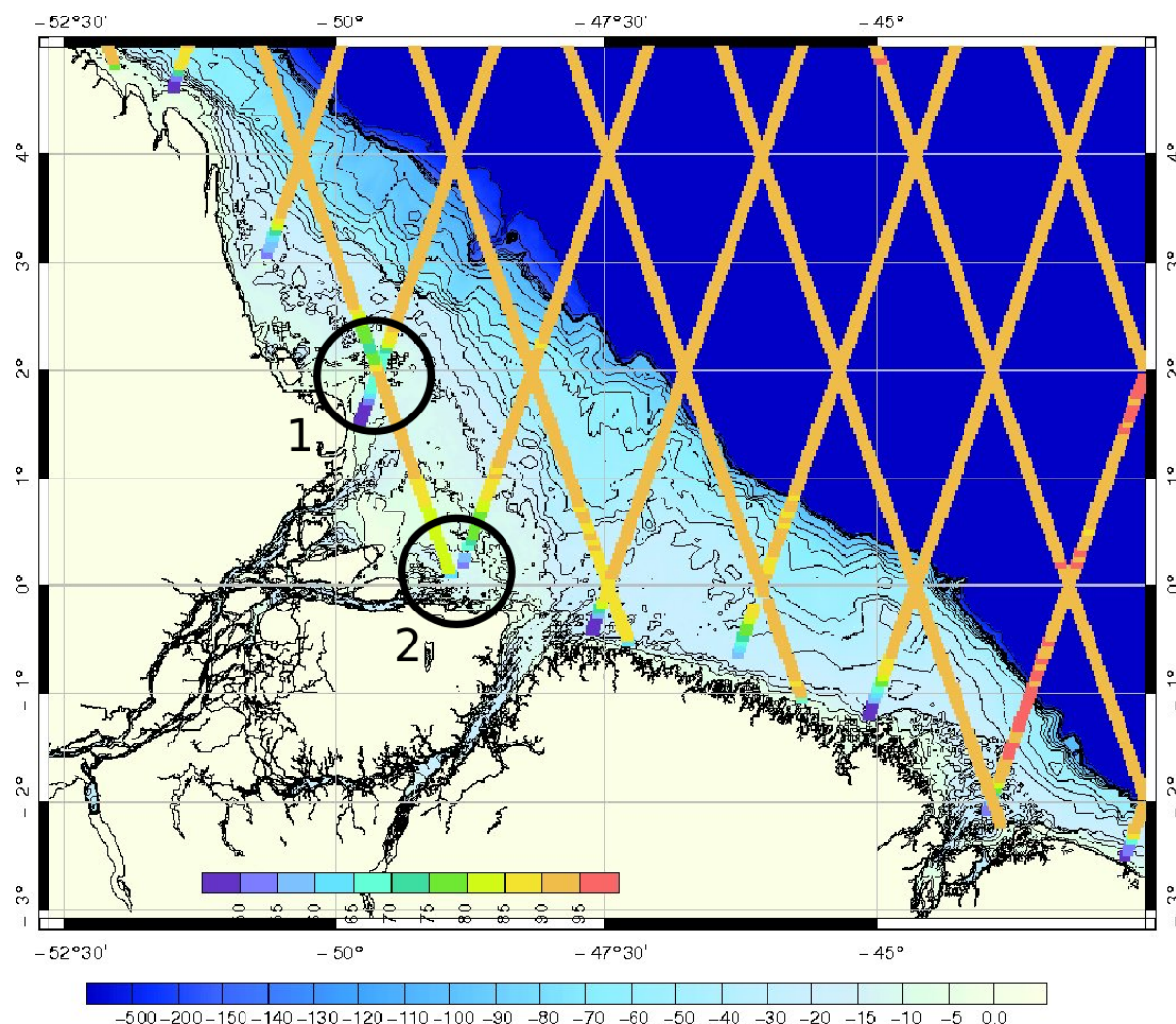


FIGURE 2.3 – Taux des données altimétriques acquises sur chaque trace (en %), superposé sur la bathymétrie (en m)

Cependant, dans le cas particulier de l'estuaire de l'Amazonie, un problème très particulier se pose à l'altimétrie côtière. La figure 2.3 présente le taux de données altimétriques acquises pour chaque trace. Globalement, ce taux est dans la moyenne des taux de l'altimétrie côtière (plus de 90 %). On voit apparaître la baisse usuelle, due à la saturation de l'altimètre, du nombre données acquises lorsque l'on se trouve proche des côtes. Toutefois, dans les deux zones encadrées dans la figure 2.3, on assiste à une chute brutale du nombre de données acquises loin des côtes. Dans le cercle numéro 1 (non loin de l'île de Maracá) de la figure 2.3, notamment, cette chute apparaît au croisement des traces 202 et 37 et apparaît pour ces deux traces.

Les données bathymétriques (voir chapitre 4) indiquent qu'il s'agit d'une zone de faible profondeur (moins de dix mètres), tandis que cette zone est une zone de forte

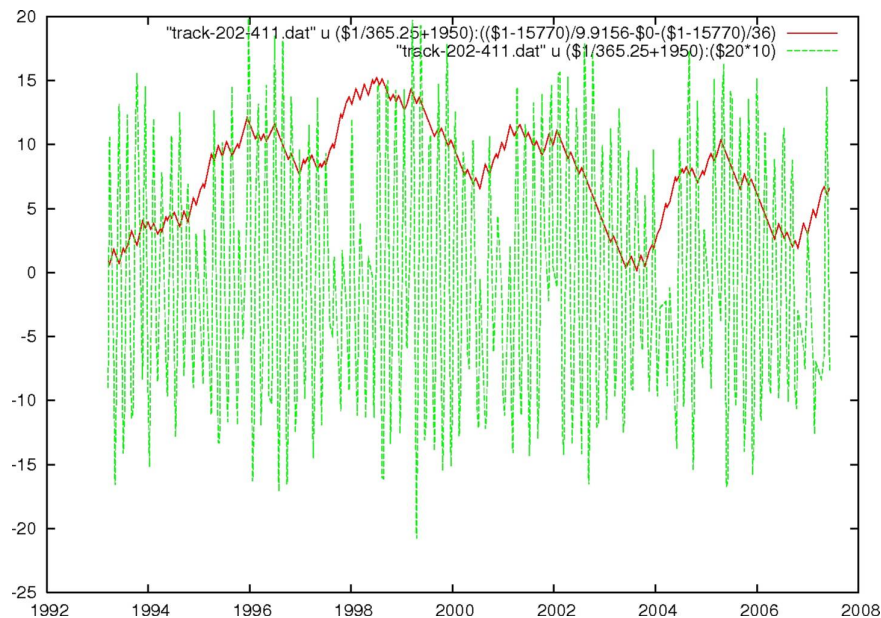


FIGURE 2.4 – Comparaison entre la marée (en vert) et l'acquisition de données altimétriques (en noir)

amplitude de marée et où on peut trouver de la crème de vase (voir chapitre 3). La figure 2.4 compare le taux de données acquises (courbe en noir) avec la marée – en vert, d'après la solution globale FES2004. Lorsque la pente de la courbe noire est positive, le taux de données acquises augmente. À l'inverse, lorsque la pente est négative, le taux diminue.

On constate que le taux devient plus faible à mesure que la marée devient plus importante. Cela peut signifier que pendant les périodes de fortes marées la zone devient découvrante, provoquant la saturation de l'altimètre. Une autre raison peut être que les faibles profondeurs et la présence de crème de vase en fond provoque l'apparition de lentilles de vase, quiaturent l'altimètre. Déterminer précisément les raisons de cette diminution du taux de données acquises nécessitera de collecter plus de données sur place.

Nous n'avons pas trouvé de cas similaire répertorié dans la littérature.

2.3 Courantomètre

Les courantomètres permettent la mesure de la vitesse et de la direction des courants marins.

Les courantomètres classiques sont munis d'une hélice et d'un compas magnétique. Le corps du courantomètre s'oriente dans la direction du courant. Le décompte du nombre de tours d'hélice pendant une période de temps donnée permet d'accéder à la vitesse moyenne du courant pendant cette période.

Les courantomètres modernes utilisent généralement l'effet doppler. Un signal ultrasonore émis vers le bas (courantomètre de surface) ou vers le haut (courantomètre immergé) est rétrodiffusé par les microparticules contenues dans l'eau de mer et capté par des transducteurs disposés en croix : le traitement des signaux recueillis permet de calculer les deux composantes horizontales du courant. Ces courantomètres sont souvent dénommés par l'abréviation anglophone ADCP (*Acoustic Doppler Current Profiler*).

2.4 CTD

Il s'agit d'une sonde composée d'un ensemble de capteurs, le tout fixé à un carrousel. Cet ensemble est relié au navire par un câble électroconducteur permettant d'acquérir les données du profil de la colonne d'eau située sous un navire à une cadence de 24 mesures par secondes.

Les capteurs sont un capteur de pression (permettant de déterminer la profondeur), des capteurs de température, des capteurs de conductivité (permettant de déterminer la salinité) et des capteurs d'oxygène. Éventuellement, la sonde peut être équipée d'un fluorimètre, ainsi que d'un transmissiomètre. Enfin, la sonde est encerclée de bouteilles de prélèvements. Pendant la phase d'immersion, afin qu'elles n'explorent pas sous la pression, les bouteilles sont ouvertes. Pendant la phase de remontée, elles peuvent être refermées, prélevant ainsi un échantillon d'eau de mer. Les mesures chimiques faites à partir d'échantillons ainsi collectés servent à calibrer les capteurs – tant pour la température que la salinité ou l'oxygène.

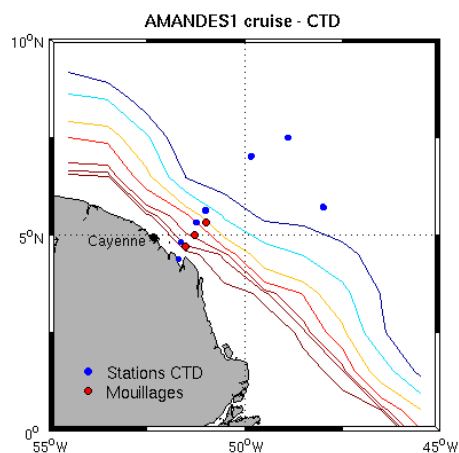
Le terme CTD est l'acronyme de *Conductivity, Temperature, and Depth*.

2.5 Campagnes de mesures

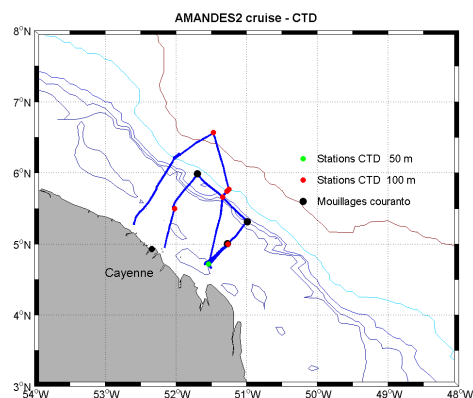
Quatre campagnes de mesures en mer ont été organisées dans le cadre du projet Amandes, d'octobre 2007 à juillet 2008 (voir figure 2.5). Si ces campagnes n'étaient pas uniquement dédiées à l'étude des marées, elles ont entre autre apporté des informations précieuses concernant la bathymétrie de la zone et les courants, grâce à un suivi saisonnier.

En outre, nous avons bénéficié des données de campagnes du projet Amasseds (voir [Beardsley *et al.*, 1995]) et du projet Hybam.

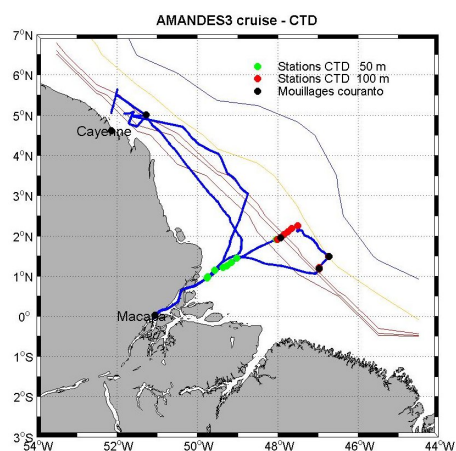
Les chapitres 3 et 4 décrivent plus en détails les jeux de données que nous avons utilisés dans le processus de validation.



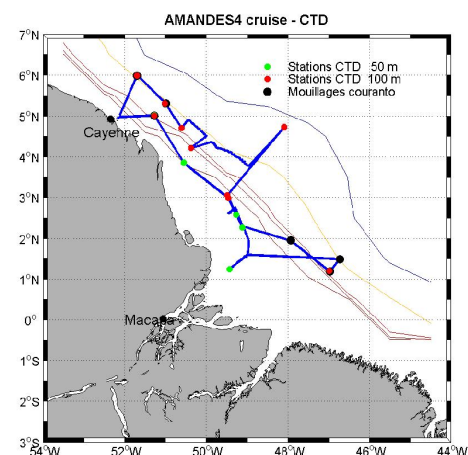
(a) *Amandes I*, octobre 2007 – points bleus : stations CTD; points rouges : mouillages de courantomètres



(b) *Amandes II*, janvier 2008 – points verts : stations CTD 50 m; points rouges : stations CTD 100 m; points noirs : mouillages de courantomètres



(c) *Amandes III*, avril 2008 – points verts : stations CTD 50 m; points rouges : stations CTD 100 m; points noirs : mouillages de courantomètres



(d) *Amandes IV*, juillet 2008 – points verts : stations CTD 50 m; points rouges : stations CTD 100 m; points noirs : mouillages de courantomètres

FIGURE 2.5 – Trajets et stations des quatre campagnes de mesures Amandes

2.6 Analyse harmonique

Comme nous l'avons vu précédemment et ceci depuis [Laplace, 1778], la marée est considérée comme composée d'une série d'ondes, l'approche naturelle est donc de décomposer les relevés marégraphiques en ondes. Soit un spectre composé de $n_{ondes} \in \mathbb{N}^*$ harmoniques et soient :

- $i \in \llbracket 1; n_{ondes} \rrbracket$ l'indice de l'harmonique considérée ;
- $f_i(t)$ le facteur de correction nodale en amplitude pour l'harmonique considérée. C'est un facteur adimensionnel et $f_i(t) \in \mathbb{R}^+$. Il est déterminé par les positions relatives de la Terre, la Lune et du Soleil, à l'aide de tables astronomiques ;
- $A_i(\lambda_p, \varphi_p)$ l'amplitude de la composante de marée i au point P (unité SI : m). Il s'agit d'une amplitude, donc $A_i \in \mathbb{R}^+$;
- V_i^0 la phase à l'origine des temps (unité SI : rad). Il s'agit d'un angle, donc $V_i^0 \in [0; 2\pi]$;
- $\omega_i(t)$ la pulsation de l'harmonique i (unité SI : rad). Il s'agit d'un angle, donc $\omega_i \in [0; 2\pi]$;
- t_0 l'origine des temps (unité SI : s), $t_0 \in \mathbb{R}^+$;
- $V_i(t) = V_i^0 + \omega_i(t - t_0)$ (unité SI : rad). Il s'agit d'un angle, donc $V_i(t) \in [0; 2\pi]$;
- $G_i(\lambda_p, \varphi_p)$ le retard de phase de la composante de marée i au point P (unité SI : rad). Il s'agit d'un angle, donc $G_i \in [0; 2\pi]$.

L'élévation de surface η au point P et au temps t peut alors s'écrire sous la forme :

$$\eta(P, t) = \sum_{i=1}^{n_{ondes}} f_i(t) A_i(P) \cos(V_i(t) + u_i(t) - G_i(P)). \quad (2.6.1)$$

Soient :

- $V'_i(t) = V_i(t) + u_i(t)$;
- $x_i(\lambda_p, \varphi_p) = A_i(\lambda_p, \varphi_p) \cos(G_i(\lambda_p, \varphi_p))$;
- $y_i(\lambda_p, \varphi_p) = A_i(\lambda_p, \varphi_p) \sin(G_i(\lambda_p, \varphi_p))$.

Alors, en décomposant $\cos(V_i(t) + u_i(t) - G_i(P))$:

$$\begin{aligned} \eta(P, t) &= \sum_{i=1}^{n_{ondes}} f_i(t) A_i(P) [\cos(G_i(P)) \cos(V'_i(t)) + \sin(G_i(P)) \sin(V'_i(t))] \\ &= \sum_{i=1}^{n_{ondes}} f_i(t) [x_i(P) \cos(V'_i(t)) + y_i(P) \sin(V'_i(t))] . \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Soit $\eta_j^{obs}(P)$ l'élévation (unité SI : m) mesurée au temps t_j (unité SI : s), composée de $n_{mes} \in \mathbb{N}^*$ mesures, $j \in \llbracket 1; n_{mes} \rrbracket$, $t_j \in \mathbb{R}^+$, $\eta_j^{obs} \in \mathbb{R}$. L'analyse harmonique consiste en un algorithme de type moindres carrés (voir [Foreman et Neufled, 1991, Godin, 1972]), c'est-à-dire que l'on cherche à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$J(P) = \sum_{j=1}^{n_{mes}} \left(\eta_j^{obs}(P) - \eta(P, t_j) \right)^2 . \quad (2.6.3)$$

D'après l'équation 2.6.2, il nous faut donc résoudre le système suivant :

$$\forall i \in \llbracket 1; n_{ondes} \rrbracket, \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial x_i}(P) = -2 \sum_{j=1}^{n_{mes}} \left[\left(\eta_j^{obs}(P) - \eta(P, t_j) \right) \frac{\partial J}{\partial x_i}(P) \right] = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial y_i}(P) = -2 \sum_{j=1}^{n_{mes}} \left[\left(\eta_j^{obs}(P) - \eta(P, t_j) \right) \frac{\partial J}{\partial y_i}(P) \right] = 0. \end{cases} \quad (2.6.4)$$

L'analyse harmonique est bien adaptée à l'analyse de séries de mesures marégraphiques, car elle porte sur un jeu de fréquences parfaitement connu. Elle permet également d'exploiter des séries temporelles dans lesquelles des mesures sont manquantes ou dont l'échantillonnage est irrégulier. Elle reste tout de même limitée par la longueur de la série temporelle et par son échantillonnage.

Différentes méthodes ont été mises en place, notamment pour pallier aux problèmes de séries de mesures incomplètes ou dont l'espacement dans le temps peuvent provoquer des difficultés à discerner les ondes entre elles. Ceci n'entre pas dans le cadre de cette étude ; pour plus d'informations à ce sujet, voir [Letellier, 2004, Simon, 2007].

2.7 Conclusion partielle

Le chapitre précédent nous a permis de mettre en équation la dynamique océanique. Dans le présent chapitre, nous avons vu comment effectuer des mesures océanographiques, notamment par des observations satellites, des mesures marégraphiques venant de station sur place, ainsi que des mesures issues de campagnes. Nous avons également abordé rapidement des méthodes pour traiter ces données. Nous pouvons donc confronter la modélisation avec la réalité physique. Il nous faut maintenant mettre en œuvre cette méthodologie pour le cas de l'Amazone.

Deuxième partie

La dynamique océanique dans l'estuaire de l'Amazone

Chapitre 3

Modélisation de la marée dans l'estuaire de l'Amazone

Dans la partie I, nous avons établi les bases théoriques permettant de réaliser un modèle d'océan. Également, nous avons vu comment confronter un tel modèle à des observations. Notre objectif est d'appliquer cette méthodologie au transport de matériaux par le fleuve Amazone. Dans un premier temps, nous nous sommes attachés à reproduire le phénomène hydrodynamique de plus grande amplitude dans l'estuaire du fleuve, à savoir la marée.

Plusieurs modèles ont déjà été développés pour l'estuaire de l'Amazone, tels que ceux présentés par [Gabioux *et al.*, 2005] ou [Nikiema *et al.*, 2007]. Cependant, ces modèles ne correspondent pas aux besoins du projet Amandes. En effet, étudier en détail le transport d'eau, de matière et d'éléments associés nécessite un modèle s'étendant sur une zone très large, à savoir toute la zone soumise à l'impact du transport. De plus, cela implique de modéliser l'ensemble des processus entrant dans le phénomène du transport. Dans cette zone particulière, les phénomènes dynamiques ayant le plus fort impact sur le transport sont la marée et le débit du fleuve.

Pour répondre aux besoins de modélisation du projet Amandes, nous avons développé un nouveau modèle, basé sur le modèle à grilles non-structurées T-UGOm. La particularité des grilles non-structurées est qu'elles peuvent être adaptées finement aux phénomènes modélisés. Notamment, elles peuvent s'adapter à diverses échelles, une même grille pouvant avoir une maille lâche dans certaines zones et au contraire beaucoup plus fine dans d'autres. Cette capacité est particulièrement utile dans le cas de l'estuaire de l'Amazone, où la configuration géographique est extrêmement complexe.

De plus, cette zone présente de très faibles profondeurs très loin des côtes : par exemple, l'isobathe 20 m y est par endroit distante de 100 km des côtes. Or, les marées étant fortes dans la région, il en découle une forte sensibilité à la bathymétrie. En effectuant une modélisation utilisant la bathymétrie digitale globale Gebco (voir [Monahan, 2008]), l'écart type de la différence complexe générale entre le modèle et les observations dans le cas de l'onde de marée M_2 est de 53,9 cm. À l'aide de cartes marines

acquises dans le cadre du projet Amandes et de données acquises pendant ses campagnes de mesures, nous avons affiné la bathymétrie Gebco. L'écart type passe alors à 29,5 cm.

La deuxième conséquence des faibles profondeurs sur des zones étendues est une forte sensibilité au frottement de fond. En conséquence, en étudiant les profils des vitesses et en étudiant la couche turbulente, c'est-à-dire l'épaisseur d'eau qui va du fond de l'océan à la fin de la zone turbulente, nous avons développé une nouvelle paramétrisation du frottement de fond. L'écart type descend alors à 27,5 cm. La comparaison entre nos résultats et les résultats déjà publiés indique une amélioration sensible de la modélisation de la marée dans cette zone.

Ces résultats ont été publiés dans un article paru dans la revue *Ocean Modelling*, reproduit ici.

Afin d'atteindre une taille publiable, certains détails n'ont pas été développés. Ils méritent néanmoins d'être précisés ici et apparaissent donc après la reproduction de l'article, en compléments méthodologiques.

Sommaire

3.1	Le modèle Amandes	66
3.2	Compléments méthodologiques	85
3.2.1	Partitionnement du domaine	85
3.2.2	Travail du frottement de fond et flux d'énergie	85
3.2.3	Comparaison de l'approche de MANNING et de celle de CHÉZY	88
3.2.4	Formulation du coefficient de traînée	89
3.2.5	Formulation de PEDLOSKY	93
3.2.6	Formulation de DOWDEN	95
3.2.7	Convergence de la méthode de NEWTON pour les paramétrisations de la couche de mélange	97
3.3	Conclusion partielle	106

3.1 Le modèle de marées Amandes pour l'estuaire et le plateau amazoniens

Cette section reproduit l'article [Le Bars *et al.*, 2010].



Contents lists available at ScienceDirect

Ocean Modelling

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ocemod

The AMANDES tidal model for the Amazon estuary and shelf

Yoann Le Bars^{a,b,*}, Florent Lyard^{a,b}, Catherine Jeandel^{a,b}, Leonardo Dardengo^{b,c,†}^a CNRS, LEGOS, 14 Av. Édouard Belin, F-31400 Toulouse, France^b Université de Toulouse, UPS (OMP), LEGOS, F-31400 Toulouse, France^c Instituto Alberto Luiz Coimbra of Post-Graduation and Research in Engineering (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 25 June 2009

Received in revised form 28 October 2009

Accepted 3 November 2009

Available online 10 November 2009

Keywords:

Amazon estuary

Tide

Unstructured grid

Bottom friction

T-UGOm

Bathymetry

ABSTRACT

The AMANDES project aims to study transports from the Andean mountains to the Atlantic Ocean through the Amazon system. This requires realistic estuarine modelling in this area strongly forced by tides and river discharge. As none of the existing models for this region would fit the actual needs of the project, a specific new generation model has been implemented.

The model is based on the hydrodynamic finite element model T-UGOm. In a first step, we limit our investigations to tidal dynamics. As the Amazon estuary is a very shallow macro-tidal area, it is necessary to improve the available bathymetries and to develop a precise bottom friction parametrisation.

In this paper, we discuss the implementation of a high resolution regional model. This allows us to develop a precise and accurate tidal model: for instance, the overall root mean square error on complex differences is reduced from 54 cm in a standard model to 27 cm in our best model. Such precise and accurate tidal modelling is a prerequisite for modelling particle transport.

© 2009 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

The AMANDES (AMazon ANDEanS) project is focused on the Amazon estuary and shelf, and the impact of Amazon waters on the neighboring Atlantic. It has three main objectives.

The first objective is to study the nature, transformation and dispersion of fluxes of trace elements and isotopes weathered from Andes Mountains and transported by the River Amazon and estuary into the ocean.

The second objective is to improve the coupled dynamical modelling of the shelf/slope/open ocean system of the Amazon mouth. This serves to better quantify the transport of freshwater and its impact on the regional circulation. It also serves to study the tidal effect on transport and re-suspension/redistribution of sediments, and the impact of all these factors on the transformation and dispersion of chemical elements.

The third objective is to quantify the impact of these integrated fluxes on the chemical composition of the water masses flowing along the Amazon margin. These fluxes are constrained simultaneously by the tidal forcing, the North Brazil Current and wind stress.

The Amazon River is about 6500 km long, and its average transport is about $170,000 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, with minimum and maximum values

at Óbidos (800 km upstream of the river mouth) between $60,000 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ and $270,000 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ (Gallo and Vinzón, 2005). A recent survey indicates that the average flow at the mouth is of the order of $200,000 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ (Callède et al., 2010). It also transports a large amount of particles and sediments: Milliman and Meade (1983) estimate that $(1.2 \pm 0.1) \times 10^9$ tons of suspended particles and 2.3×10^8 tons of dissolved material are transported yearly into the Atlantic ocean by the Amazon river. Its lower course is very flat: 20 m of variation in level over the last 1500 km. As a consequence, the river flow is mostly constrained by upper water discharge and tides. The flow is so strong that seawater never enters the estuary, resulting in a large pool of brackish water beyond the mouth (e.g. Callède et al., 2010; Gordeev et al., 1992), which creates an interface between Brazilian coast and deep water that can be 200 km long, preventing any intrusion of salted water into the estuary. This pool oscillates with the tide and, after leaving it, waters from the river extend in a plume over hundreds of kilometers into the Atlantic Ocean along the South American coast under the influence of the North Brazil Current and the trade winds.

According to Nikiema et al. (2007), local currents, mainly the North Brazil Current, play a key role in determining the fate of the Amazon River discharge. The North Brazil Current is fed by the South Equatorial Current, and runs northwestwards along the Brazilian coast with a transport of about 35 Sv ($1 \text{ Sv} = 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) and over 300 km width near 44°W , with a seasonal variation of about 3 Sv. The circulation on the shelf is mainly forced by trade winds. Northeast trade winds dominate from December to May,

* Corresponding author. Address: CNRS, LEGOS, 14 Av. Édouard Belin, F-31400 Toulouse, France. Tel.: +33 5 6133 2719; fax: +33 5 6125 3205.

E-mail address: lebars@legos.obs-mip.fr (Y. Le Bars).

† Leonardo died in the crash of Air France AF447 flight on June 1st, 2009.

having high monthly mean intensities that can reach 18 m s^{-1} in February. Southeast trade winds blow during summer and autumn with lower intensities (less than 12 m s^{-1}).

The shape of the Amazon estuary is extremely complex, as many of channels and mangroves make the separation between dry and wet land difficult to define. Furthermore, the Amazon flow causes very fast erosion and sedimentation processes, so that the river bed changes rapidly with time, and one can observe variations from one season to another. Part of the Amazon discharge goes through the numerous channels down to the Pará river. Though it represents less than 5% of the flow of the Amazon River, about 30% of waters in the Pará comes from the Amazon (Callède et al., 2010). Usually, the Amazon River mouth itself is considered to extend from Cabo do Norte to Ponto Patijoca, about 330 km wide.

The river is connected to a large shelf extending from Venezuela (10°N , 60°W) to the eastern edge of Brazil (5°S , 35°W). Gallo and Vinzón (2005) indicate that the estuary is classified as macro-tidal, with a tidal range between 4 m and 6 m, and as semi-diurnal, with a wave shape relationship (the quotient of the diurnal to semi-diurnal harmonics) equal to 0.1. This shelf is very flat and shallow. For instance, according to the bathymetry published by Gallo and Vinzón (2005), the 20 m isobathymetric line can be more than 100 km away from the Amazon mouth.

According to Kosuth et al. (1999), during low water, tidal effects can be measured 1000 km upstream. During high water, because of the greater flow speed, the tidal wave is damped. Nevertheless, tides propagate to Santarém, almost 700 km upstream.

Several tidal models of Amazon estuary exist (e.g. Beardsley et al., 1995; Gabioux et al., 2005), but their accuracy is limited. Also, they are very local models, so they cannot take into account the full extent of the dynamical processes involved in particle transport.

In this study, we address the tidal barotropic modelling issue as tides are one of the major hydrodynamic processes in this area. We focus on the impact of bathymetry and bottom stress parametrisation on tidal simulation, as they are the two main constraints in local tidal propagation (Fontes et al., 2008). Considering all the issues in modelling the Amazon estuary and shelf, this article represent the very first step in a more comprehensive modelling. Therefore, we have used a very simple tide spectrum and not included river discharges.

In Section 2, we focus on the numerical model and the unstructured mesh design. In Section 3, we present briefly the data available in the study area. In Sections 4 and 5, we present the sensitivity of the simulation to the bathymetry and bottom stress parametrisation. Conclusions and outlooks are given in Section 6.

2. The hydrodynamic model

In the framework of the multidisciplinary study AMASSEDs (AmasSeds Group, 1990), Beardsley et al. (1995) proposed an interpolation of tide measurement for the M_2 tidal constituent. Gabioux et al. (2005) have successfully applied a barotropic model to study the tidal amplification on the shelf due to bottom stress adjustment, considering the fluid mud distribution over the shelf. Gallo and Vinzón (2005) have extended this model to Óbidos, with the purpose of studying the generation of overtides and compound tides. Recently, Nikiema et al. (2007) have used the 3D model MOBEEDYCS to study the extension of Amazon plume. Lastly, Fontes et al. (2008) have used a barotropic model to study the influence of fluid mud distribution, the North Brazilian Current, and trade winds on the river plume.

Only the model of Gallo and Vinzón (2005) extends upstream and none of the models cited takes into account the connections between the River Amazon and the River Pará. Moreover, they

are deployed on limited areas and cannot therefore take into account all the interactions between the different hydrodynamical phenomena that take place in the Amazon estuary. The AMANDES tidal simulations are based on the model T-UGOm (Toulouse Unstructured Grid Ocean Model). Though quite a recent model, it has already been successfully used in coastal modelling (e.g. Pairaud et al., 2008). T-UGOm is a 3D Eulerian model with a stand-alone 2D module for shallow water modelling. T-UGOm uses unstructured grids and a flexible architecture designed to accommodate a large variety of different types of discretisation and numerical schemes. Its 2D mode is the follow-up of the MOG2D model (e.g. Carrère and Lyard, 2003), originally based on the wave equation formulation developed by Lynch and Gray (1979). T-UGOm has already proven its accuracy for tidal modelling. For instance, it has been successfully used in project ALBICOCCA (e.g. Vignudelli et al., 2005), which was aimed at improving altimeter products. In ALBICOCCA, T-UGOm was used to produce the global ocean storm surges simulation used in altimetry dealiasing corrections.

As mentioned before, T-UGOm is based on unstructured meshes. Unstructured meshes have the flexibility to be finely adapted to the geography and the specificity of the studied phenomenon. This can be helpful for a fine modelling: structured meshes can hardly take into account all the complexity of the coastline in Amazon estuary.

T-UGOm has several original new features. For instance, bottom friction coefficient can be prescribed locally. This functionality is extremely useful in the Amazon estuary shallow waters, where the influence of the bottom stress is essential and where the bottom friction is known to be highly variable, with extreme conditions such as mud flow. Different parametrisations for the bottom friction have been tested, as discussed in this paper.

In this article, we focus on 2D modelling. The 2D module of T-UGOm is based on the shallow water equations. Let $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v})^T$, where T denotes the transpose, be the depth-averaged velocity. Then, shallow water equations can be written as follows (e.g. Cushman-Roisin, 1994; Gill, 1982):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (H\bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}} + f_c \mathbf{k} \otimes \bar{\mathbf{u}} = -g\nabla\eta + \bar{\Psi}, \quad (2)$$

where H is the total water height, f_c Coriolis' parameter, \mathbf{k} a unit vector on the vertical, g the acceleration due to gravity, and η the elevation of the free surface. ∇ is the del operator, which can be defined in two dimensions as $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)^T$, \cdot is the scalar product, and \otimes the vector product.

$\bar{\Psi}$ is defined as follows:

$$\bar{\Psi} = \mathbf{F} + \mathbf{D}, \quad (3)$$

where \mathbf{F} represents forcing, such as the tides generating forces and atmospheric surface pressure, and \mathbf{D} represents dissipative terms, such as bottom friction and horizontal momentum diffusion. In the modelling discussed in this paper:

$$\mathbf{F} = g(1 + k_2 - h_2)\nabla\Pi_a + g\nabla\Pi_{lsa}, \quad (4)$$

$$\mathbf{D} = (\nabla \cdot k_H \nabla)\bar{\mathbf{u}} - \frac{\tau_b}{H} - C_W(\nabla H \cdot \bar{\mathbf{u}})\nabla H, \quad (5)$$

with k_2 and h_2 second order Love's numbers, Π_a the astronomical gravitational forces potential, Π_{lsa} the loading shelf attraction, k_H the horizontal diffusion coefficient, τ_b the bottom friction, discussed in details in Section 5, and C_W the internal wave drag coefficient.

In this study, we solve these equations using their wave equation formulation, as it ensure good stability behaviour, and therefore allows to use large time-step.

To establish the wave equation formulation, firstly, Eq. (1) is derived on time:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial H \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6)$$

Then $\frac{\partial H \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}$ can be replaced by its value in Eq. (2):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \nabla \cdot [H \bar{\Psi} - g H \nabla \eta - \nabla (H \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) - f_c \mathbf{k} \otimes H \bar{\mathbf{u}}] = 0. \quad (7)$$

According to Kinnmark and Gray (1985), integration of Eq. (1) does not guarantee mass conservation (mass may have a linear trend with time). Therefore, T-UGOm 2D module solves the so-called generalised wave equation, i.e. (7) + τ_0 (1), where τ_0 is an arbitrary constant frequency. By doing this, we ensure mean mass conservation, which is sufficient in regional tidal modelling (possible trends are controlled by the open boundary conditions). In applications presented on this paper, $\tau_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (detailed discussions about τ_0 can be found in Kinnmark and Gray (1985) and Werner et al. (1986)). To solve the modified shallow water equation, T-UGOm uses a finite element $P_1 - P_1$ approach on unstructured grids, as describe by Lynch and Gray (1979).

Let δ be the size of one element in the mesh. Firstly, we impose a minimum value δ_{\min} and a maximum value δ_{\max} , such as $\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}$. We then use two criteria for mesh refinement. Let λ be the smallest wavelength of considered tide waves – in the modelling discussed here, we have chosen M_4 wavelength. Then:

$$\lambda = cT,$$

where T is the wave period and:

$$c = \sqrt{gH}.$$

Le Provost and Vincent (1986) indicate that $\delta \leq \frac{\lambda}{15}$ is a good compromise between precision and computation time.

Our second criterion is based on bathymetry gradient, i.e.:

$$\delta \leq \frac{2\pi}{15} \frac{\|\nabla H\|}{H}.$$

To summarize, element size is defined as follows:

$$\delta = \max \left[\delta_{\min}, \min \left(\delta_{\max}, \frac{T\sqrt{gH}}{15}, \frac{2\pi}{15} \frac{\|\nabla H\|}{H} \right) \right]. \quad (8)$$

Also, elements size are constrained by coastline definition (geometrical constraint) and we ensure that the size changing ratio between two adjacent element is less than 1.5. The criterion based on wavelength is somehow quite a weak constraint, while the geometrical constraint, especially in the Amazon estuary, is the strongest one.

Using these criteria, the model mesh has been refined in the Amazon estuary, especially in the complex channels connecting the River Amazon and the River Pará (see Fig. 2) and above the shelf break. Consequently, the largest edges are 20 km long, when the smallest are 2 km long.

Readers interested in more detailed discussions about mesh refinement should refer to Greenberg et al. (2007) and Legrand et al. (2007), for instance.

As can be seen on Fig. 2, the mesh spreads widely away from the Amazon estuary. Indeed, non-linear tides develop on the shelf, and it is usually difficult to prescribe these non-linear waves at open boundaries. Moreover, non-linear tides are generally not referenced in global data bases, except for M_4 . As a consequence, we have chosen to set the mesh limits in the deep ocean, where boundary conditions are easier to define. In those regions, we assume that non-linear tides but M_4 are negligible and are locally generated inside the modelling area. To set the boundary condi-

tions of our model, we have used the global model FES2004 (Lyard et al., 2006).

Since non-linear tides can have great amplitudes (Gallo and Vinzón, 2005), the lack of data can generate significant errors, so moving boundary conditions away from our interest area minimize the consequences of errors in their setting. Consequently, we have extended our first mesh upstream to Almeirim (see Fig. 2), which will also allow further investigations on the impact of water flow on tide propagation. However, Kosuth et al. (1999) mention that tides can propagate up to Óbidos. Therefore, the mesh will be extended to Óbidos in future work.

3. Validation data

In the following sections, we compare our simulations with tidal observations to estimate the accuracy of the various improvements brought to the model. Concerning tides in the Amazon estuary and shelf, only few surveys are available. The sources for the data we have used in the present study are summarized below.

One of the most synoptic tide study has been done during cruises of the AMASSED project (Beardsley et al., 1995). In this paper, authors have also collected and published data from historical tidal gauges.

In addition, the International Hydrographic Organization (IHO) provides a global tidal constants data set (IHO, 1990). We have extended the Beardsley et al. (1995) data set with the IHO tidal constants. Tidal gauges are represented as yellow dots in Fig. 1.

Satellite altimetry missions, such as TOPEX/Poseidon-Jason mission, have been already used in studying the Amazon river (e.g. Zakharova et al., 2006). They also can be used as remote, virtual, tide gauges (Minster et al., 1995). We have harmonically analysed temporal series from TOPEX/Poseidon to create a new validation database for the coastal and shelf regions. The along-track positions where tides have been analysed are represented as red dots in Fig. 1.

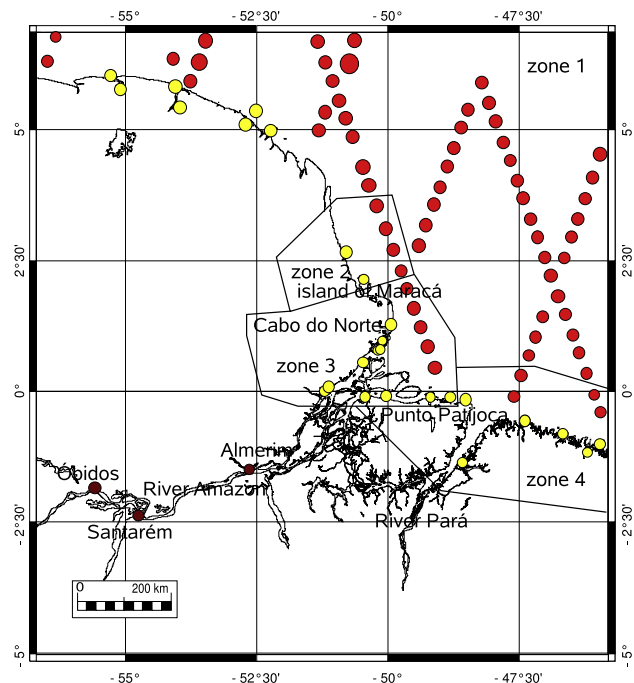


Fig. 1. The Amazon estuary – validation zones, red dots corresponds to altimetry-derived tidal gauges and yellow dots to in situ tidal gauges. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this paper.)

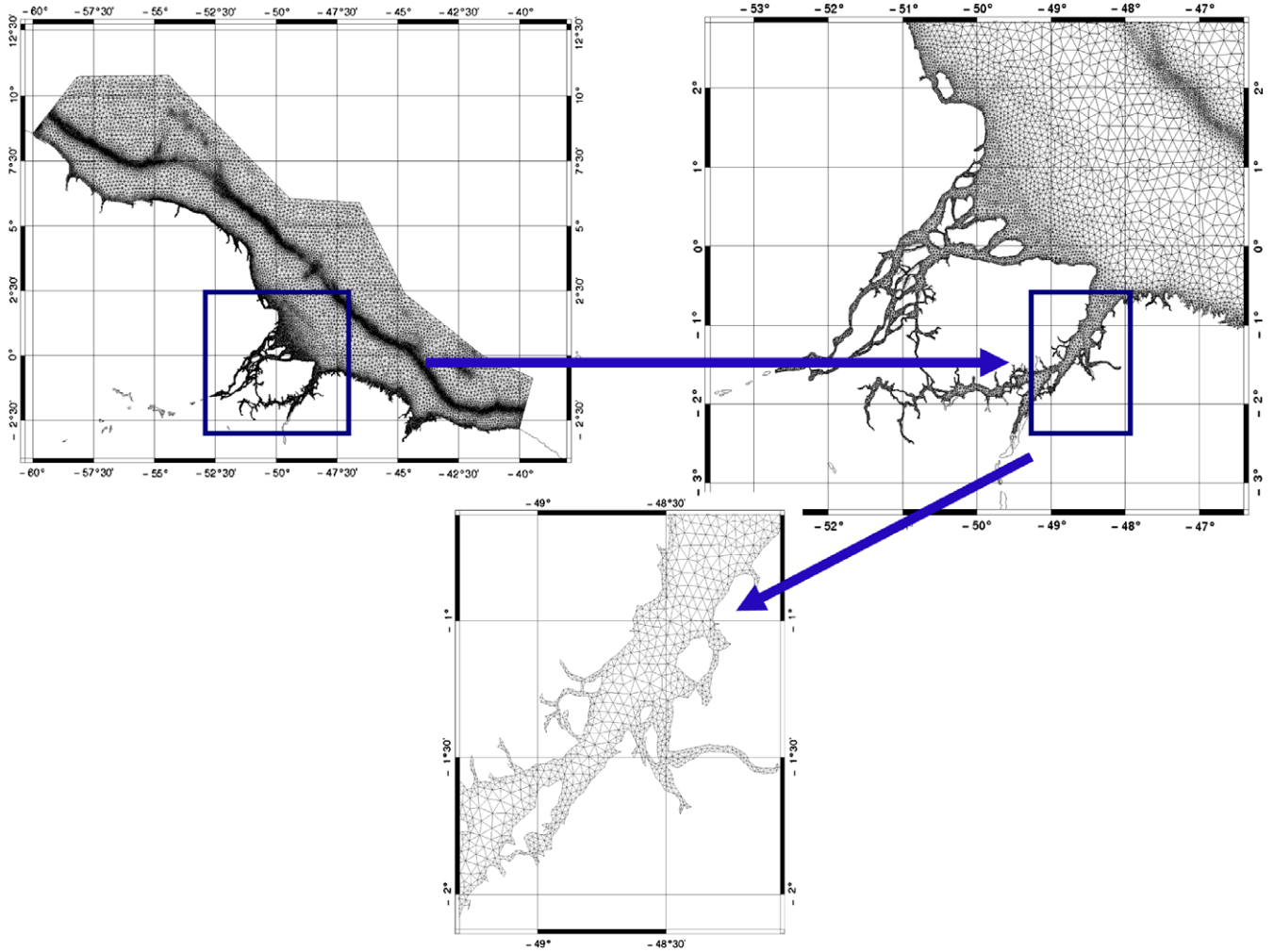


Fig. 2. Model mesh. Largest edges are about 20 km long, smallest are 2 km long. Maximum refinement is located over the continental shelf break and in river channels.

The Fundação de Estudos do Mar (FEMAR), i.e. the Brazilian Navy, has published in 2000 a tidal directory containing spectral analysis from several tidal gauges in Brazil (FEMAR, 2000). To fit Greenwich Mean Time, we have applied a phase shift of 3 h. Data are then consistent with Beardsley et al. (1995) data, but for two tidal gauges, located in Boiçucanga and Viséu.

4. Sensitivity to the bathymetry

Because of the shallowness of the area, bathymetry is a critical point in modelling the Amazon estuary. In order to evaluate the sensitivity of the modelling to the bathymetry, two experiments have been conducted. Experiment 1 uses a standard global digital bathymetry, while experiment 2 uses a reconstructed one. Details of the bathymetry reconstruction will be given in a forthcoming publication.

In these experiments, the run duration is 14 days, with the first three one dedicated to spin-up. By considering only M_2 , we have been able to reduce simulation time to its minimum, and thus to keep the computational costs of the numerous exploratory experiments at a workable level.

4.1. Experiment 1

Two global digital bathymetries are representative of the general characteristics of bathymetrical databases of the Amazon shelf

region: Monahan (2008) (GEBCO) and Smith and Sandwell (1997) (see Fig. 3).

The GEBCO one degree bathymetry (Fig. 3a) looks fairly reasonable all over the shelf, except at the estuary, where depth are clearly too shallow. On the contrary, as can be seen in Fig. 3b, Smith and Sandwell's bathymetry is extremely noisy in the Amazon estuary and shelf, making it unsuitable for hydrodynamic modelling. The ETOPO (Amante et al., 2008) database suffers from the same problem. Therefore, we have selected the GEBCO bathymetry for experiment 1, as we consider that it is the best standard choice for this region.

Fig. 4 shows the M_2 tidal constituent in experiment 1. Fig. 4a and b shows, respectively, amplitudes and phase of the solution, while Fig. 4c and d shows the comparison between the solution and validation data. In Fig. 4c and d, each point represents the misfit between observation and numerical solution for the in situ and satellite tidal gauges. Overall this study: $\text{misfit} = \text{model} - \text{observed}$.

In order to identify where the main differences between measurement and modelling lies, we have split the domain into four different zones, shown in Fig. 1. Table 1 sums up the statistical scores of the comparison. σ stands for standard deviation and is define as follows:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^* (X_i - \bar{X})}, \quad (9)$$

where $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ is a sample and \bar{X} its expected value. When $z = (x + iy) \in \mathbb{C}$, $z^* = x - iy$.

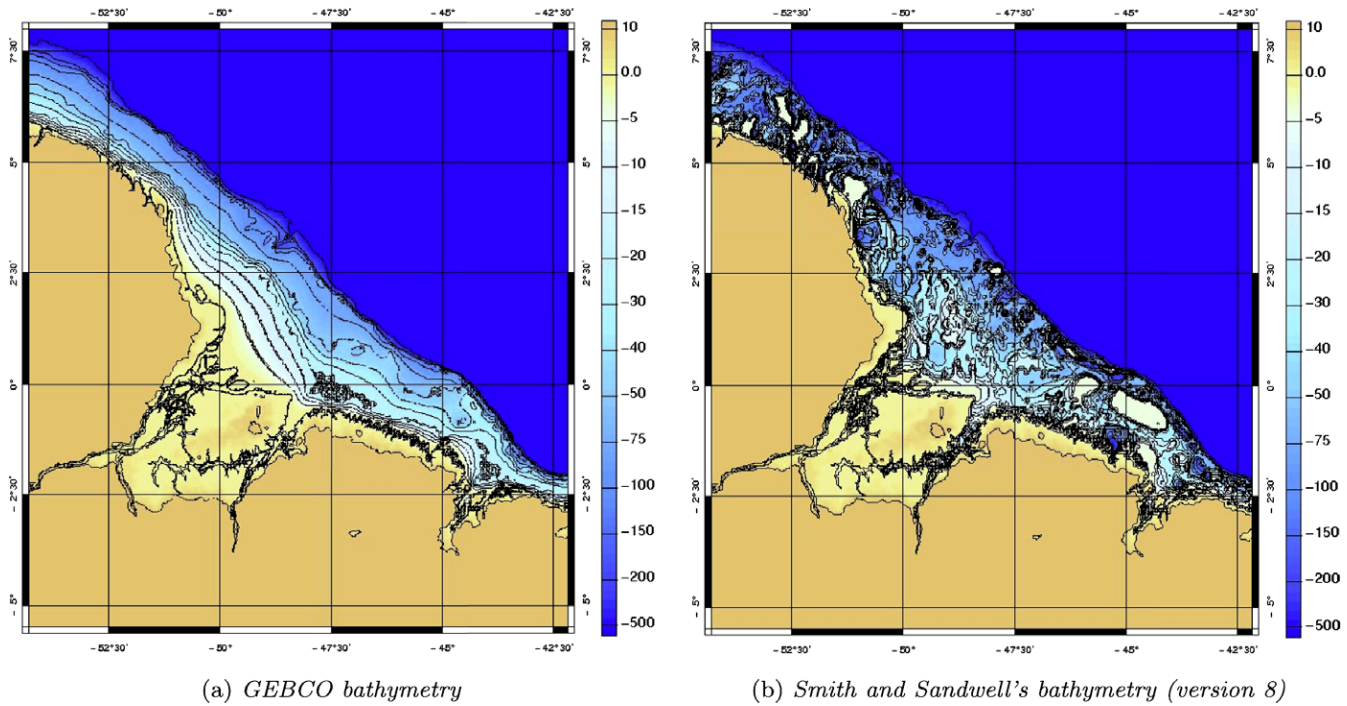


Fig. 3. Global digital bathymetries (in m). Smith and Sandwell's bathymetry (b) presents unrealistic short scale structures, while GEBCO bathymetry (a) lack of details in River Amazon estuary.

RMS stands for root mean square and its definition is:

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^* X_i}. \quad (10)$$

In deep water, the solution does fit with data. Over the shelf, the typical error is a few centimeters. In the coastal areas, the most important errors are concentrated in the northwest part of the shelf, where an important deficit of amplitudes and shift in phases are observed.

4.2. Experiment 2

Since this area is known to be shallow water, one reason of the deficit of amplitude is the inaccuracy of the bathymetry. Indeed, though the GEBCO bathymetry is quite accurate when depth is greater than 20 m, it provides depths of the order of 1 m or less in the river, when Gallo and Vinzón (2005) nautical charts based bathymetry indicates 10–20 m, and sometimes more. As a consequence, a first step in improving the solution is to improve the bathymetry precision.

In this purpose, we have merged the GEBCO bathymetry with digital nautical charts and arbitrarily set depth in the river to 20 m, to fit with Gallo and Vinzón (2005) bathymetry. This has led to the first AMANDES bathymetry (AB1) shown in Fig. 5. This bathymetry must be seen as a first step in the iterative process for improving the model bathymetry. Following solutions presented and discussed in this paper are computed with AB1.

Parameters in experiment 2 are identical to the one of experiment 1, but the AB1 bathymetry. Fig. 6 presents the solution obtained in experiment 2 and the comparison with validation data, while Fig. 7a shows the spatial distribution of phase differences between solutions of experiment 1 and experiment 2.

The main differences between experiment 1 and experiment 2 are an increase in tide amplitude and change in phase close to coastlines and in Amazon estuary. Bathymetry improvements have a sig-

nificant positive effect on the accuracy of the solutions. Table 1 indicates that the overall standard deviation error on the amplitude reduces from 51.5 cm in experiment 1 to 35.7 cm in experiment 2. Standard deviation error in phase reduces from 32.3° to 9.7°, and complex root mean square error reduces from 53.9 cm to 29.5 cm. The error reduction in phase is more or less homogeneous over the validation region, while the error reduction in amplitude and in complex differences is mostly concentrated in zones 2 and 3. However, Fig. 6 shows that an important deficit of amplitude in front of the Amazon River remains, as well as a phase shift.

5. Bottom stress parametrisation

Among the remaining imprecisions, some of them cannot be corrected only by refining the bathymetry. Indeed, this area is macro-tidal and subject to strong rivers flows and trade winds forcing. As a consequence, currents intensities are important. But it is also a very shallow area. Therefore, the sensitivity to the bottom stress is important. Gabioux et al. (2005) show the influence of the drag coefficient and the variation of this coefficient due to sediment patches on tide propagation. According to Fontes et al. (2008), its influence is of the same order as the one of the bathymetry.

The specificity of the studied area is that it combines oceanic zones and fluvial zones. The first ones are generally modeled with a hydrodynamical approach, based on Chézy's formula, using the empirically determined Chézy's coefficient C , while the latter ones are generally modelled with a hydraulic approach, based on Manning's formula, using the empirically determined Gauckler–Manning coefficient n . Anyway, these two approaches are equivalents as (e.g. Dronkers, 1964):

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n},$$

where R_h is the hydraulic radius.

Both n and C are to be empirically determined, and determining the hydraulic radius can be really tricky in our application.

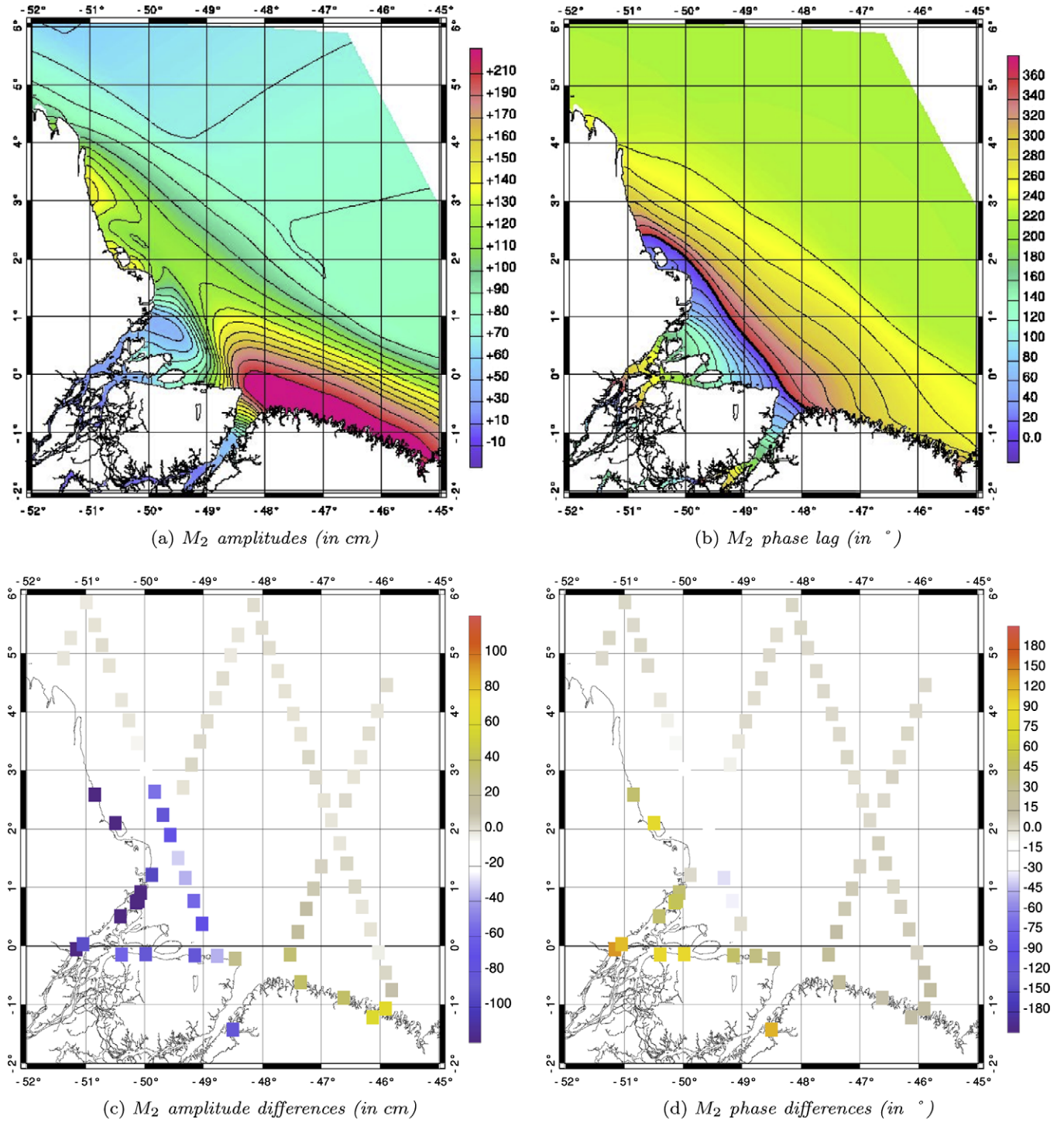


Fig. 4. Experiment 1 – M_2 tidal constituent (using GEBCO bathymetry) and comparison against altimetry-derived tidal gauges and in situ tidal gauges harmonic constants ($\text{misfit} = \text{model} - \text{observed}$). The closest agreement is found away from river estuary (maximum difference of about 10 cm), differences become larger inside the River Amazon estuary.

Therefore, as T-UGOm is a hydrodynamical model, we have kept the Chézy's formulation overall the modelled area.

5.1. Shear stress

In the Newtonian hypothesis and in viscous flow, the vertical shearing contribution force \mathbf{F}_s may be expressed by (e.g. Dronkers, 1964):

$$\mathbf{F}_s = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right), \quad (11)$$

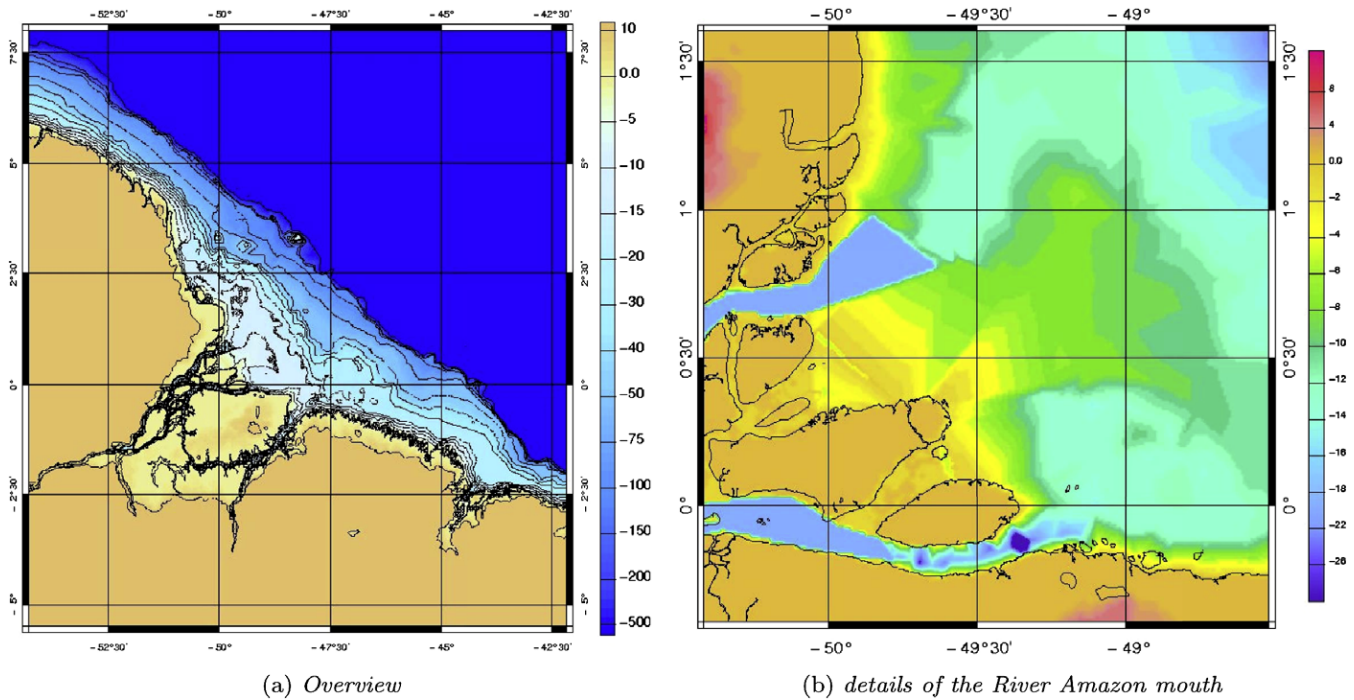
where μ is the dynamic viscosity of the fluid, and \mathbf{u} is the Eulerian profile of the fluid speed.

This momentum is derived from the shear stress τ :

$$\tau = \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \quad (12)$$

Table 1Comparison between solution of experiments and validation data – A stands for amplitude, G for phase, and $Z = Ae^{iG}$.

	Zone	Δ_A		Δ_G		Δ_Z	
		Mean (cm)	σ (cm)	Mean (°)	σ (°)	$\ \Delta_Z\ $	RMS (cm)
Experiment 1	Zone 1	2.6	10.7	0.6	4.2	2.7	10.9
	Zone 2	−92.5	62.4	11.2	34.2	122.4	119.8
	Zone 3	−68.0	37.3	45.1	49.6	55.8	75.9
	Zone 4	50.0	41.7	22.8	30.6	53.9	63.4
	Global	−13.1	51.5	13.4	32.3	8.0	53.9
Experiment 2	Zone 1	4.7	12.0	1.3	3.2	5.0	10.7
	Zone 2	−42.5	31.7	−7.8	6.5	51.0	42.7
	Zone 3	−37.2	25.5	−0.2	14.4	27.6	37.2
	Zone 4	56.7	32.0	11.3	12.5	49.6	54.0
	Global	−0.8	35.7	1.6	9.7	11.3	29.5
Experiment 3	Zone 1	5.7	14.5	1.5	3.1	6.1	12.2
	Zone 2	−21.0	21.4	−10.7	4.3	42.1	32.9
	Zone 3	−16.1	27.6	5.6	14.2	19.9	32.1
	Zone 4	73.4	30.9	9.0	13.8	55.6	63.9
	Global	8.0	34.3	2.3	9.9	13.2	30.3
Experiment 4	Zone 1	1.4	5.0	3.7	3.3	5.8	9.2
	Zone 2	10.8	20.2	−7.8	6.9	29.9	33.7
	Zone 3	−20.7	25.5	6.5	19.3	26.5	37.7
	Zone 4	10.2	23.1	24.2	11.2	41.6	49.9
	Global	−1.1	19.1	6.1	12.9	8.8	27.5

**Fig. 5.** AMANDES reconstructed bathymetry AB1 (in m), created by merging GEBCO bathymetry with nautical charts and setting depth arbitrary to 20 m in river channels.

In barotropic 2D case, we are interested in the mean vertical momentum diffusion \bar{F}_s :

$$\bar{F}_s = \frac{\rho}{H} \int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) dz = \frac{\rho}{H} \left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right]_0^H = \frac{1}{H} (\tau_s - \tau_b), \quad (13)$$

where ρ is the fluid density, τ_s the surface stress, and τ_b the bottom stress.

Surface stress is mainly caused by wind and surface pressure forcing. It has been studied before and is now well known. Here, we present the parametrisation of the bottom stress used in T-UGOm.

5.2. Turbulent parametrisation

According to Cushman-Roisin and Malačič (1997), in turbulent mode, bottom stress τ_b is parameterised as follows:

$$\tau_b = \rho \|\mathbf{u}_\star\| \mathbf{u}_\star, \quad (14)$$

where ρ is the water density and \mathbf{u}_\star the so-called friction velocity.

In barotropic modelling, the speed is integrated over the whole water height. As a consequence, we only know the depth-averaged velocity $\bar{\mathbf{u}}$, defined as:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{H} \int_0^H \mathbf{u}(z) dz. \quad (15)$$

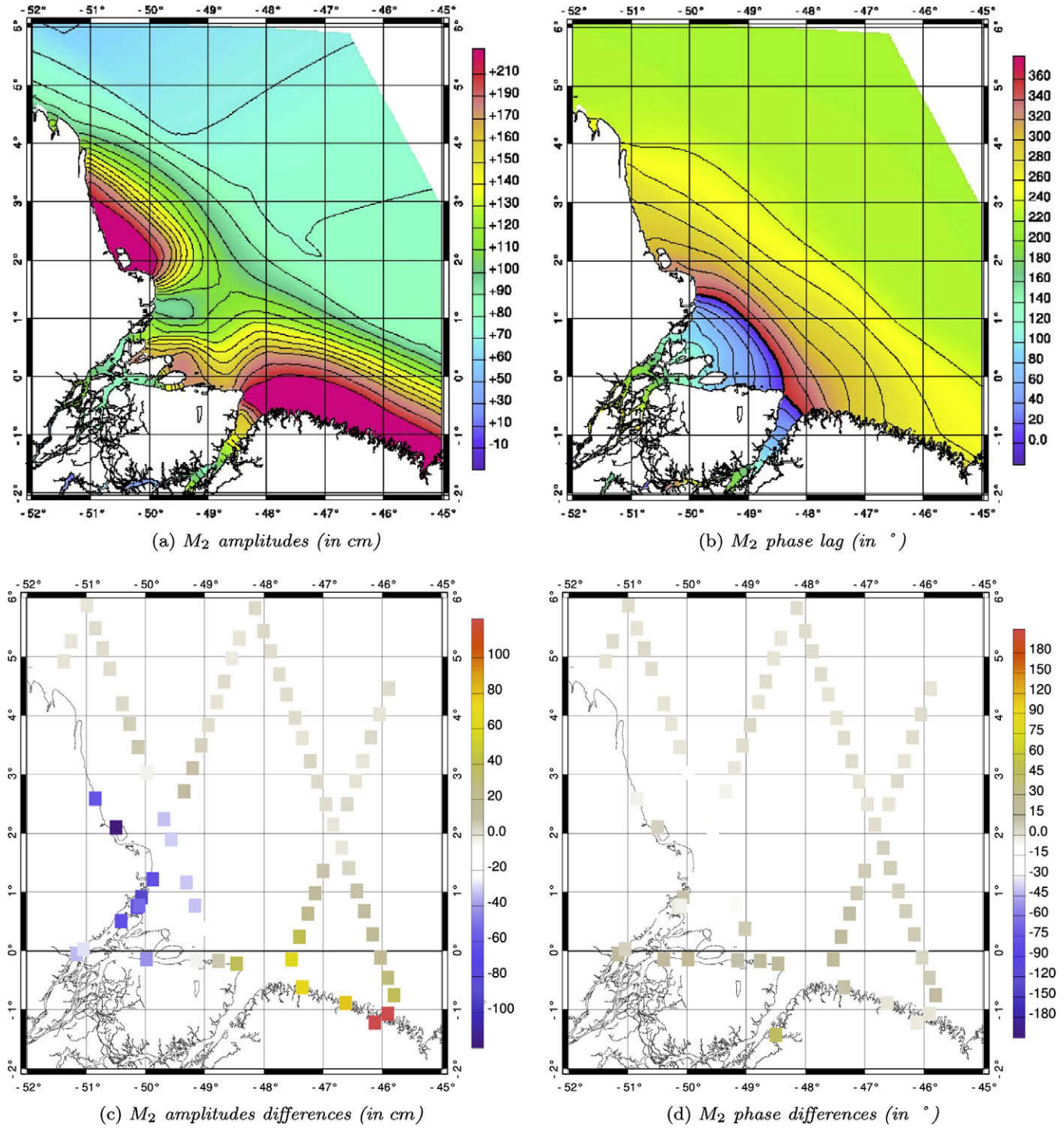


Fig. 6. Experiment 2 – M_2 tidal constituent (using AB1 bathymetry) and comparison against observations ($\text{misfit} = \text{model} - \text{observed}$). The solution is closer to the observations than in experiment 1. It still shows significant deficit of amplitude in the River Amazon mouth.

In order to link the Eulerian profile of speed and the friction velocity, one uses a dimensionless correcting friction coefficient C_D and then:

$$\mathbf{u}_* = \sqrt{C_D} \mathbf{u}. \quad (16)$$

In barotropic models, \mathbf{u} is usually considered constant along the vertical axis. This leads to:

$$\tau_b = \rho C_D \|\mathbf{u}\| \mathbf{u}. \quad (17)$$

According to [Dronkers \(1964\)](#), Chézy's coefficient and C_D are related by:

$$C_D = \frac{g}{C^2}.$$

For global modelling and deep water modelling purpose, C_D is often considered constant (generally 2.5×10^{-3}). However, in shallow water, where the flow is much more dependent on bottom friction, it can yield inaccurate results. We have done sev-

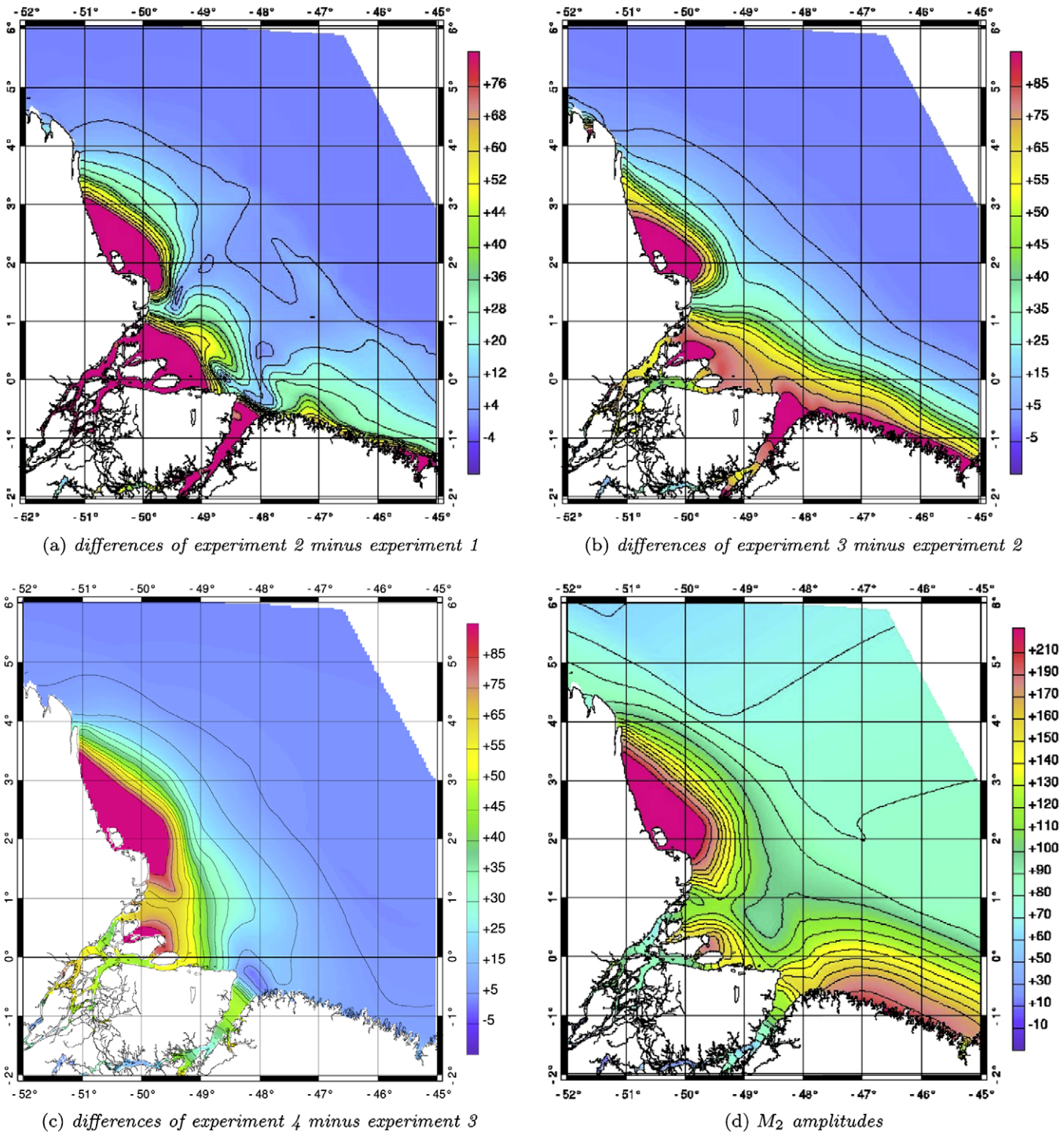


Fig. 7. M_2 amplitude differences (in cm): (a)–(c) main differences are concentrated into river channels and the northern part of the shelf, and (d) M_2 amplitudes from experiment 4 (in cm).

eral tuning experiments (not detailed in this article), which lead to $C_D = 1.5 \times 10^{-3}$ as the better value in Amazon estuary and shelf local modelling. It is the value we have used in experiment 1 and experiment 2. To correct the remaining errors in experiment 2, we need to take greater care of the bottom stress parametrisation.

Attempts have been made since long to derive the bottom drag coefficient from predefined velocity profiles (e.g. Nihoul, 1977). Anyway, some issues still remain unsolved. In this study, we have tested two parametrisations.

5.2.1. Logarithmic speed profile

Soulsby et al. (1993) propose to use a logarithmic profile for speed on the whole water height:

$$\mathbf{u}(z) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \mathbf{u}_*, \quad (18)$$

where z_0 is the rugosity length, expressed as a height that depends on the nature of the bottom sediment and $\kappa = 0.4$ is von Kármán's constant.

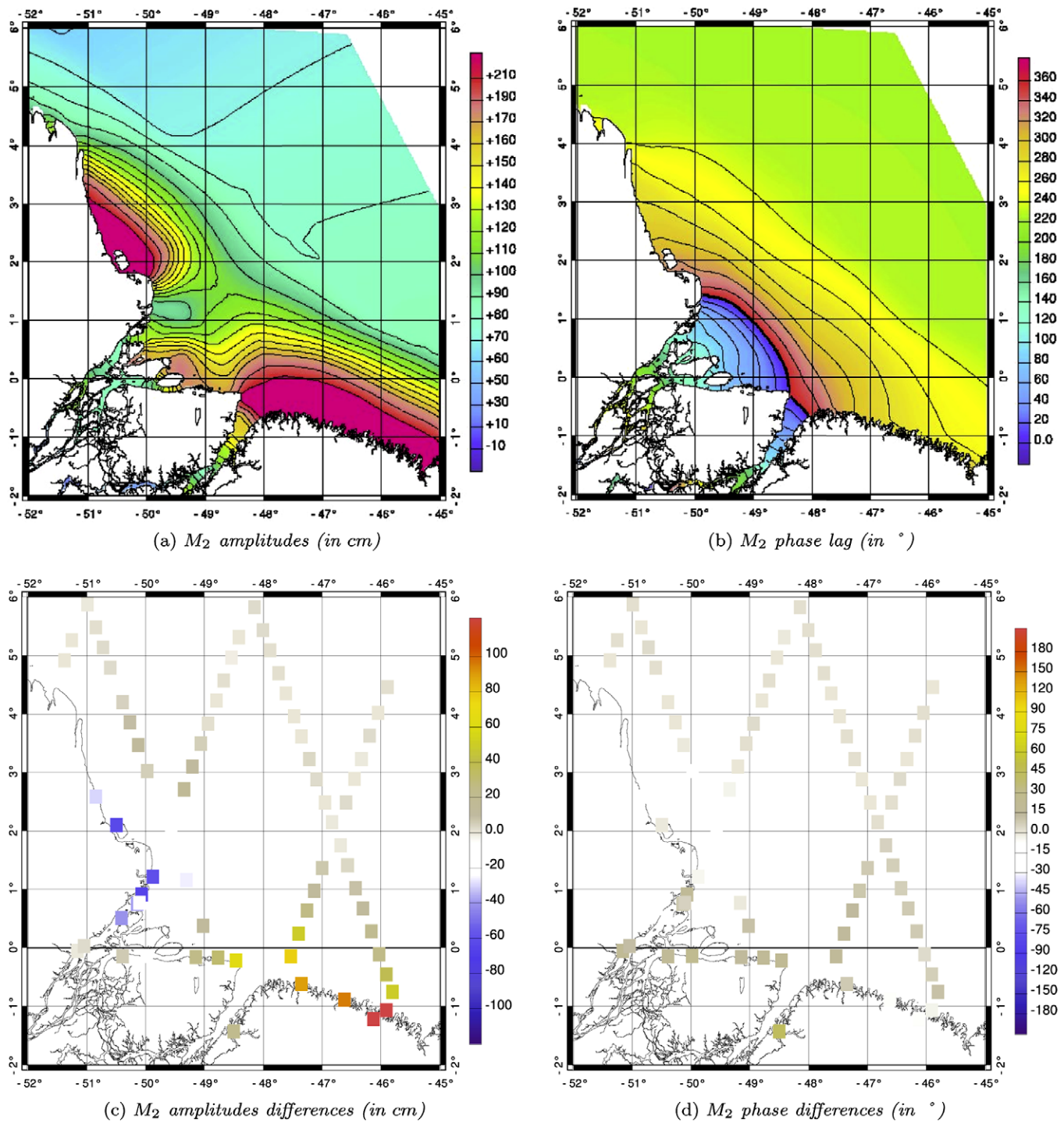


Fig. 8. Experiment 3 – M_2 tidal constituent (logarithmic speed profile) and comparison against observations ($\text{misfit} = \text{model} - \text{observed}$). Misfits level is less than 5 cm and 10° in deep water and on the shelf. Significant disagreement is concentrated along the shorelines.

Table 2

Comparison between the two parametrisations: H_e (Pedlowsky's formulation)/ H_c (Dowden's formulation). H_e has been computed for latitude 10° and H_c with $K = 0.1$. Values in meters.

z_0 (m)	$\ u\ $ (m s $^{-1}$)					
	10^{-2}	5×10^{-2}	10^{-1}	5×10^{-1}	1	5
2.5×10^{-5}	5.58/176.44	24.67/294.91	46.99/368.01	211.30/615.74	404.98/768.70	1845.49/1287.35
10^{-4}	6.29/187.84	27.42/313.30	51.95/390.62	231.35/652.32	441.78/813.73	1998.04/1360.38
2×10^{-4}	6.71/194.24	29.02/323.59	54.84/403.26	242.82/672.70	462.70/838.77	2083.86/1400.87
2×10^{-3}	8.58/219.99	35.91/364.69	67.07/453.57	290.21/753.27	548.36/937.54	2428.19/1559.60

Then, Eqs. (15) and (17) lead to (computations detailed in Appendix A.1):

$$C_D = \left(\frac{\kappa(H - z_0)}{H \ln \frac{H}{z_0} + z_0 - H} \right)^2. \quad (19)$$

When $H \gg z_0$:

$$C_D \approx \left(\frac{\kappa}{\ln \frac{H}{z_0} - 1} \right)^2.$$

Experiment 3 has been done using this parametrisation of C_D , with $z_0 = 10^{-4}$ m, as several tuning experiments (not detailed here) have shown that this value leads to the best fitting with measurements (readers interested in a more detailed discussion on z_0 should refer to Soulsby et al. (1993)). Fig. 8 shows the solution, while Fig. 7b represents the geographical repartition of differences between experiment 2 and experiment 3. Statistical comparison with validation data can be found in Table 1.

In the deep ocean, the solution is closer to measurement than in experiment 2, but the solution departure compared to observation is higher in the estuary and coastal regions. The strong negative bias may indicate that the z_0 value is too high in these locations. This could be due to a strong contrast in bottom rugosity that can be explained by the different types of sediment, the configuration of the river bottom and ocean bottom, and also by the presence of fluid mud that can almost inhibit locally the bottom friction.

5.2.2. Logarithmic speed profile in a mixing layer

Though Soulsby et al. (1993) parametrisation is more realistic than considering C_D a constant, it is still an approximation, as the speed profile is more complex in a bottom friction layer (e.g. Chassaing, 2000). Letellier (2004) proposes a more detailed parametrisation, considering a logarithmic profile in a bottom mixing layer which height is H_c , and a linear profile out of this layer:

$$\mathbf{u}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \mathbf{u}_* & \text{when } z_0 < z \leq H_c, \\ \frac{1}{\kappa} \ln \frac{H_c}{z_0} \mathbf{u}_* & \text{when } H_c < z \leq H. \end{cases} \quad (20)$$

As H_c and z_0 are constants, $\ln \frac{H_c}{z_0}$ is constant, so the speed profile is linear outside the mixing layer.

Eqs. (15), (20) and (17) lead to this new parametrisation (calculations detailed in Appendix A.2):

$$C_D = \begin{cases} \left(\frac{\kappa H}{H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c} \right)^2 & \text{if } H > H_c, \\ \left(\frac{\kappa(H - z_0)}{H \ln \frac{H}{z_0} + z_0 - H} \right)^2 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (21)$$

If $H \gg z_0$ when $H \leq H_c$, then:

$$\left(\frac{\kappa(H - z_0)}{H \ln \frac{H}{z_0} + z_0 - H} \right)^2 \approx \left(\frac{\kappa}{\ln \frac{H}{z_0} - 1} \right)^2.$$

When $H = H_c$:

$$\left(\frac{\kappa H}{H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c} \right)^2 = \left(\frac{\kappa}{\ln \frac{H_c}{z_0} - 1} \right)^2$$

and:

$$\left(\frac{\kappa}{\ln \frac{H}{z_0} - 1} \right)^2 = \left(\frac{\kappa}{\ln \frac{H_c}{z_0} - 1} \right)^2,$$

so this parametrisation is continuous.

To apply this new parametrisation, one needs to know the mixing layer height H_c . In that purpose, two parametrisations were tested. In the first, following Letellier (2004), we consider that

Table 3

Values of $\|\tau_b\|$ depending on $\|\mathbf{u}\|$ for sea water when the forcing wave is M_2 and with $C_D = 2.5 \times 10^{-3}$.

$\ \mathbf{u}\ $ (m s ⁻¹)	$\ \tau_b\ $ (N m ⁻²), viscous mode	$\ \tau_b\ $ (N m ⁻²), turbulent mode
10 ⁻²	1.18 × 10 ⁻⁶	2.50 × 10 ⁻⁷
5 × 10 ⁻²	5.90 × 10 ⁻⁶	6.25 × 10 ⁻⁶
10 ⁻¹	1.18 × 10 ⁻⁵	2.50 × 10 ⁻⁵
5 × 10 ⁻¹	5.90 × 10 ⁻⁵	6.25 × 10 ⁻⁴
1	1.18 × 10 ⁻⁴	2.50 × 10 ⁻³
5	5.90 × 10 ⁻⁴	6.25 × 10 ⁻²

$H_c = H_e$, where H_e is the height of Ekman's bottom layer. This leads to (calculations detailed in Appendix B):

$$H_e \approx \frac{\kappa^2 \|\mathbf{u}\|}{f_c \cdot \left(\ln \frac{H_e}{z_0} - 1 \right)}. \quad (22)$$

As this parametrisation is based on Pedlosky's work (Pedlosky, 1987), it is later noted as "Pedlosky's formulation."

For the second parametrisation, we use formulations from Dowden (1972) and Nielsen (1992). It leads to (calculations detailed in Appendix C):

$$H_c^3 \approx \frac{K^2 \kappa^2 \|\mathbf{u}\|^2 a}{16 \Omega^2 \left(\ln \frac{H_c}{z_0} - 1 \right)^2}, \quad (23)$$

where $a = 6371 \times 10^3$ m is the radius of a sphere having the same volume as the Earth, $\Omega = 7.292 \times 10^{-5}$ s⁻¹ is the rotation rate of the Earth, and $0.10 < K < 0.13$ is a constant equivalent to von Kármán's constant, but that is 3 to 4 times lesser and that takes into account properties of the studied fluid. This parametrisation is later noted as "Dowden's formulation."

Both parametrisations have a solution that cannot be analytically computed. Therefore, their computation requires to approximate the solution, for instance by using Newton's algorithm (e.g. Press et al., 2002).

Table 2 compares values obtain with Pedlosky's formulation and Dowden's formulation. On the one hand, magnitude orders of Dowden's formulation are higher than those that can be found

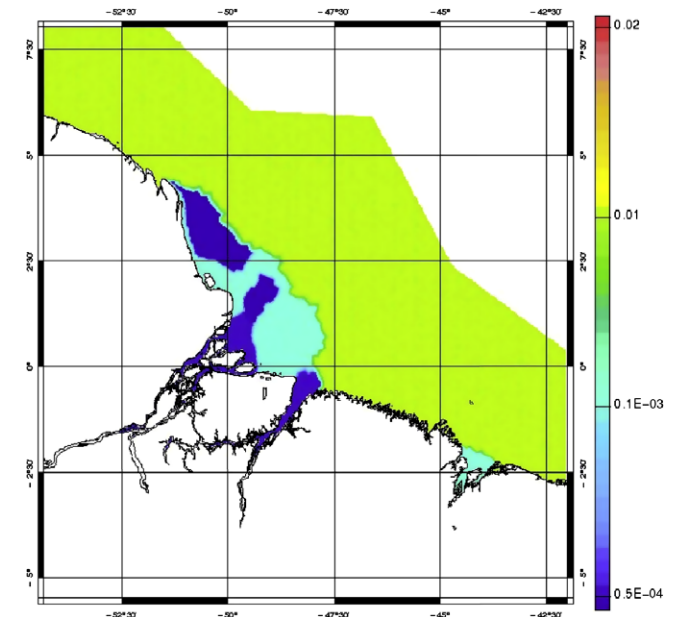


Fig. 9. z_0 Repartition prescribed in experiment 4 (in m).

in the literature and those of Pedlosky's formulation. On the other hand, Pedlosky's formulation poses problem near the equator, as f_c get closer to 0 and then H_e tends to $+\infty$.

To summarize, we have two parametrisations for H_c . The first one cannot be used close to the equator, where the Amazon estuary lies. The second one overestimates the bottom mixing layer height. In other words, none of them is suitable in our study, though bottom friction is a crucial matter when modelling tides in this area. This illustrates the difficulty to completely take into account bottom friction in this region. Alternative strategies

could have been used to adapt these parametrisations to the Amazon estuary and shelf. For instance, one could use Dowden's parametrisation with $K < 0.1$, or compute both Pedlosky's and Dowden's parametrisations and use the lesser value, but for a better description of the mixing layer, one should rely on a 3D approach. Such an approach is being tested with T-UGOm. However, because of the shallowness of the area and the high current speed, the mixing is quite large in the modeled area. As a consequence, in a first step, it is probably a good compromise to assume that the mixing layer occupies the full water column in

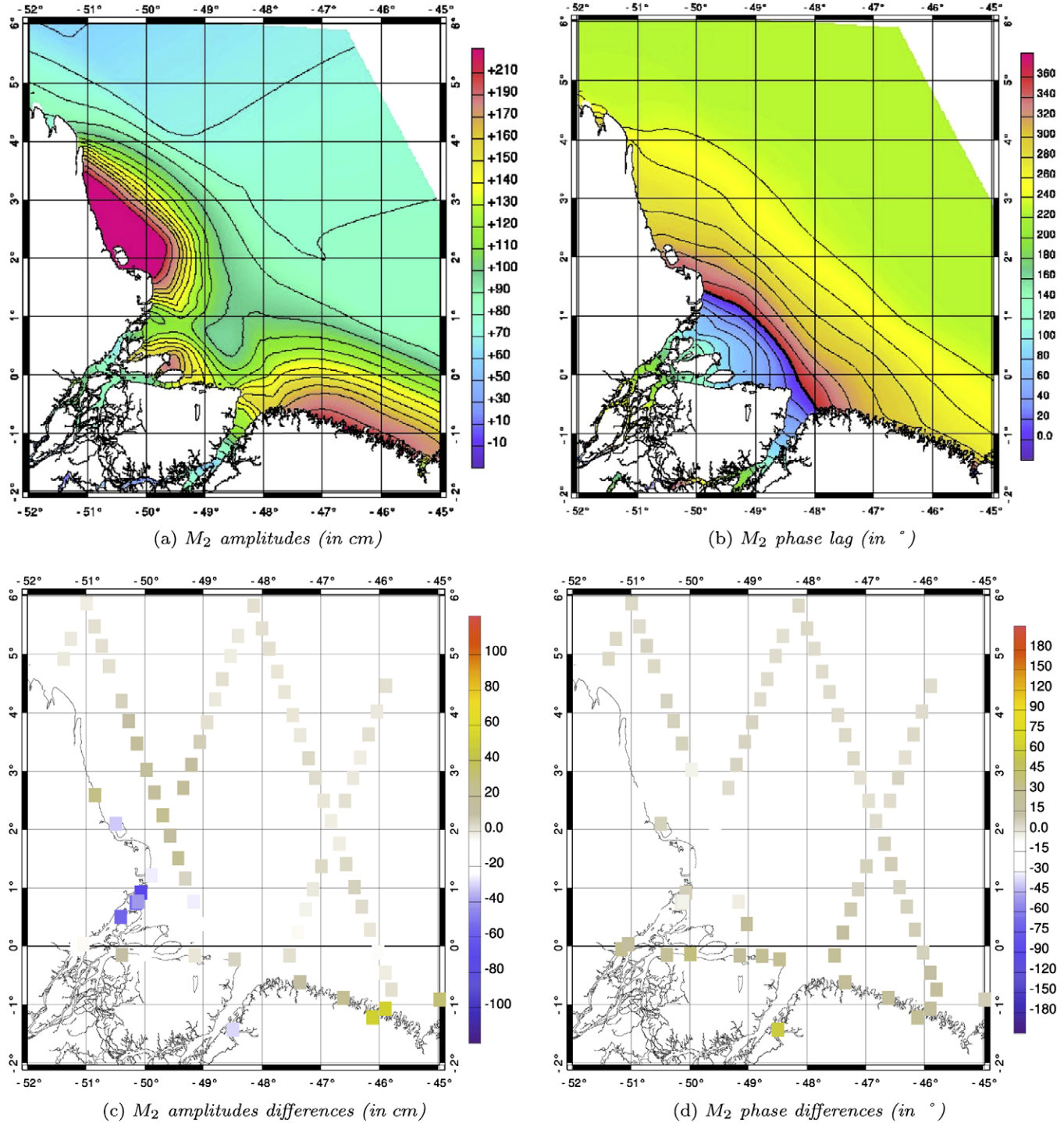


Fig. 10. Experiment 4 – M_2 tidal constituent (regionalised friction) and comparison against observations ($misfit = model - observed$). Less disagreement than in experiment 3, concentrated in the River Amazon mouth.

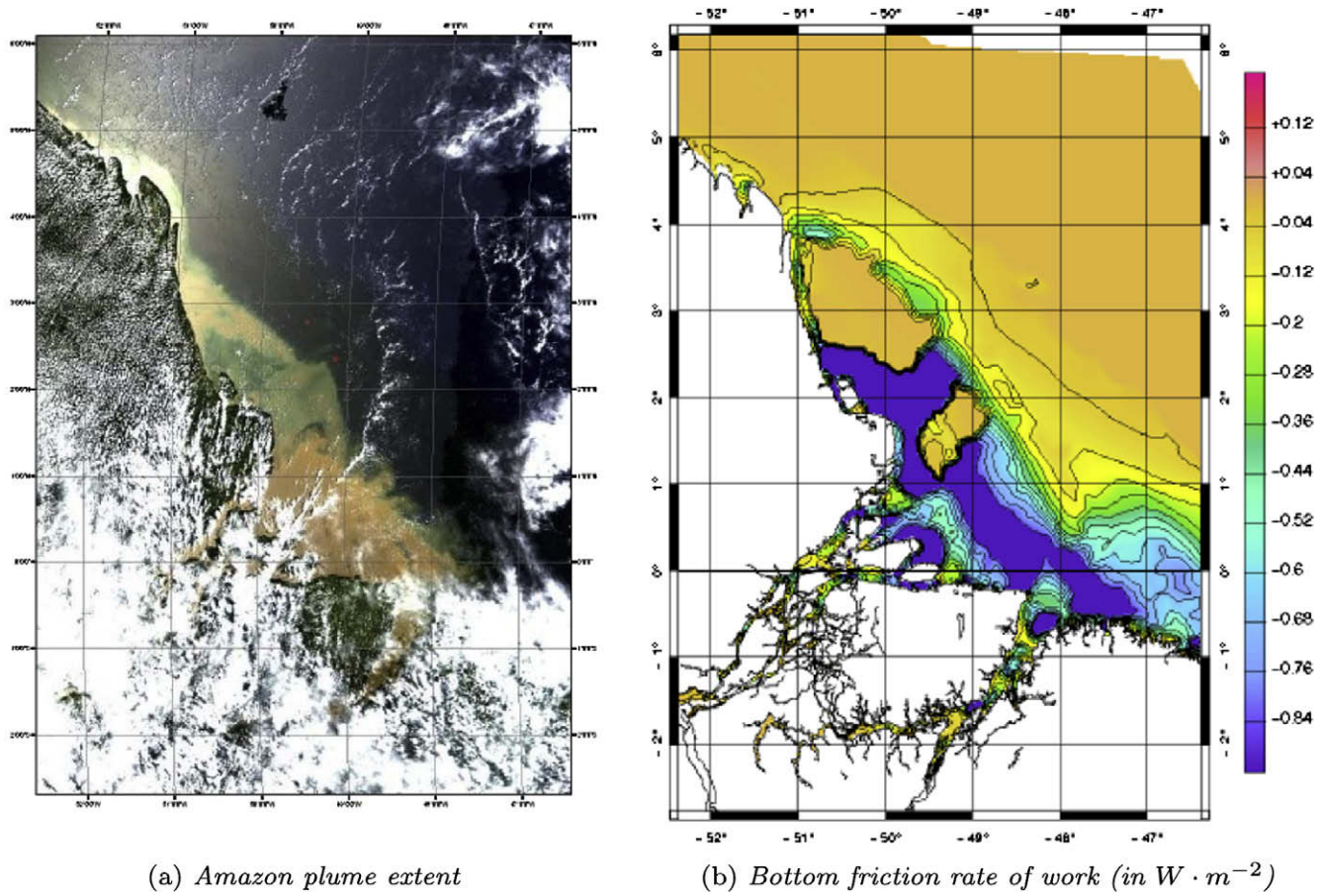


Fig. 11. Correlation between (a) plume extent (visible light satellite image) and (b) geographical repartition of bottom friction rate of work. Credit for satellite image: MODIS Land Rapid Response Team, NASA/GSFC.

the region where friction is at work and use a logarithmic profile on the whole water height.

5.3. Viscous parametrisation

When z_0 is close to 0, for instance in presence of fluid mud, the bottom friction is purely viscous. Then, according to [Gabioux et al. \(2005\)](#):

$$\tau_b = \rho \sqrt{\omega \nu} \mathbf{u}, \quad (24)$$

where ω is the frequency of the forcing wave and ν the fluid kinematic viscosity.

Table 3 shows some values of τ_b obtained with this parametrisation, for sea water and when the forcing tide is M_2 . It also shows the value of τ_b in turbulent mode, with $C_D = 2.5 \times 10^{-3}$.

5.4. Regionalisation of the drag coefficient

The Amazon discharge causes patches in bottom sediment repartition ([Beardsley et al., 1995](#); [Fontes et al., 2008](#); [Gabioux et al., 2005](#)). Consequently, z_0 values differ from place to place. The morphology of the sea bed is modified by the action of ocean waves and currents. As mentioned in the above section, uniform rugosity parameter does not allow to reach a satisfying level of accuracy over the whole domain of modelling, and the spatial variability of the sea bed rugosity must be introduced in the model. In order to do so, a domain partition algorithm based on degenerated mesh technical has been developed for T-UGOm.

Using degenerated meshes has two advantages. Firstly, to create the partition, one can use its usual finite element interface. Secondly, as it is based on single vertices connected by direct neighbouring relation, superposition of areas is intrinsically avoided. Once the partition is created, an original algorithm (to be published in a further article) reconstructs z_0 distribution (Fig. 9). When $z_0 = 0$, the friction is considered purely viscous.

Partition shown in Fig. 9 has been designed by using a semi-empirical method. First, we have reproduced the partition and initialised the rugosity values from [Gabioux \(2002\)](#) and [Gabioux et al. \(2005\)](#). Then, both partition and values have been tuned by comparing our simulations with validation data.

Experiment 4 has been done with this repartition of z_0 . Fig. 10 shows the solution and Fig. 7c shows the geographical repartition of differences between solution of experiment 3 and solution of experiment 4. Statistical comparison is summed up in Table 1.

Compared to previous experiments, experiment 4 shows the best agreement with the validation data. Still, standard deviation on amplitude error level is larger than 20 cm in regions 2, 3 and 4. Compared to the usual performances of tidal modelling in shelf seas, this level of error is significantly higher and a lot of issues remain unsolved. First, the model bathymetry and coastlines, even improved compared to standard database is far from perfect. Secondly, for computational reasons, the tidal forcing of our experiments is limited to the M_2 tide, underestimating the non-linear interaction that would take place if a larger, more realistic, tidal spectrum had been used. Thirdly, the Amazon River flow was not taken into account in modelling presented here and then the interaction with tides has been neglected. Considering these last two issues, complementary

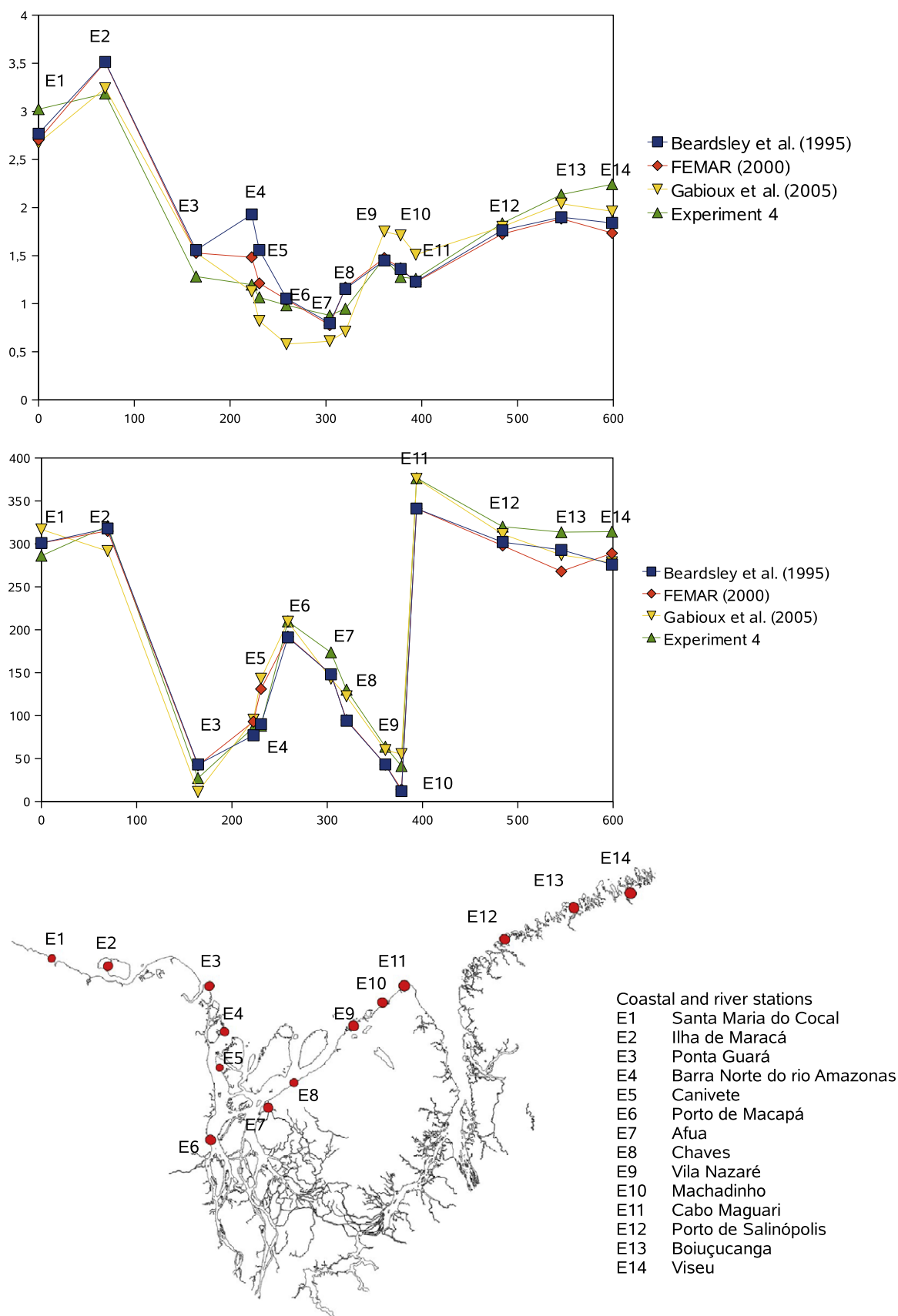


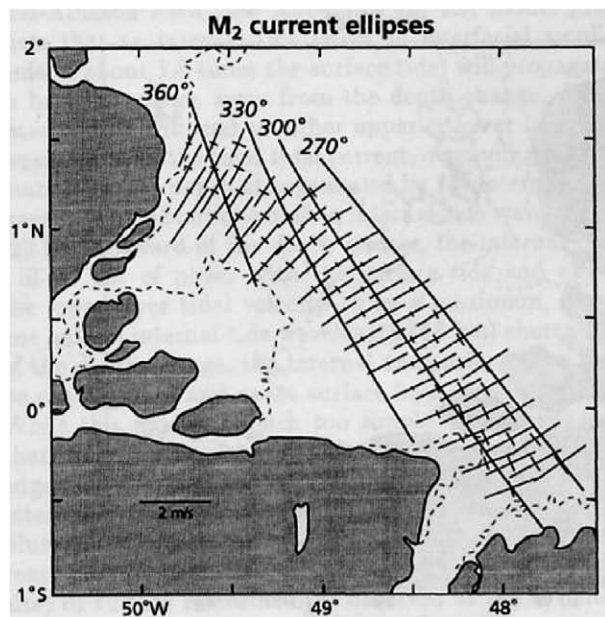
Fig. 12. Comparison against data along the coastline for Beardsley et al. (1995) and Gabioux et al. (2005) and experiment 4.

Table 4

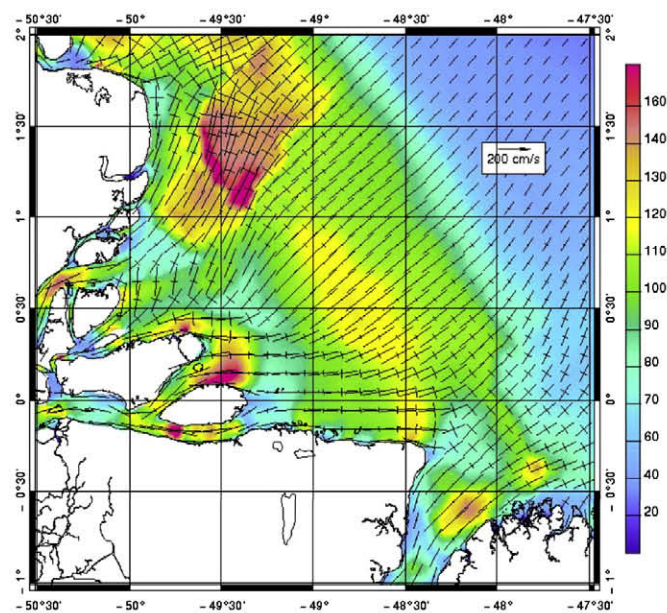
Comparison between solution of experiment 4 and FEMAR (2000) data – A stands for amplitude, G for phase, and $Z = Ae^{iG}$.

Zone	Δ_A		Δ_G		Δ_Z	
	Mean (cm)	σ (cm)	Mean (°)	σ (°)	$\ \Delta_Z\ $	RMS (cm)
Zone 3	–18.3	20.0	14.9	16.1	22.9	36.1
Global	–4.3	28.0	17.1	17.9	11.3	51.8

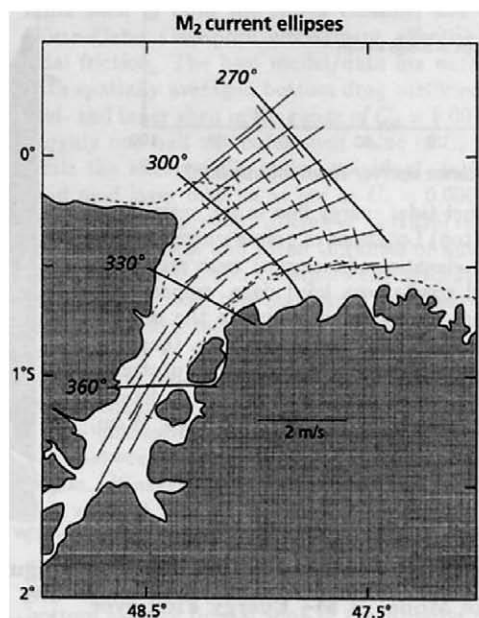
modelling, either with river discharge, or with a more complete spectrum (including M_2 , S_2 , N_2 , K_2 , $2N_2$, K_1 , O_1 , P_1 , Q_1 , M_f , M_m , M_{tm} , MS_{qm} , and M_4), have shown that, even if adding these has indeed a positive effect on solutions, it does not change conclusions concerning topics addressed here, i.e. sensitivity to bathymetry and bottom friction. Especially, this runs had little influence, if any, on z_0 optimal value. This can be explained by the fact that M_2 represents most of tide energy budget in this area, and because of



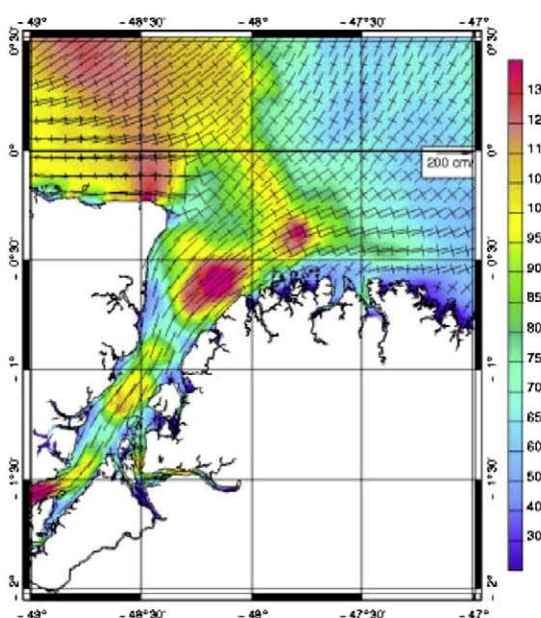
(a) Beardsley et al. (1995) fitted current ellipses, with the phase of maximum flood (onshore) given in degrees Greenwich with a contour interval of 30° in River Amazon mouth



(b) M_2 current ellipses in River Amazon mouth from EXP4 (in $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$)



(c) Beardsley et al. (1995) fitted current ellipses, with the phase of maximum flood (onshore) given in degrees Greenwich with a contour interval of 30° in River Pará mouth



(d) M_2 current ellipses in River Pará mouth from EXP4 (in $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$)

Fig. 13. M_2 Current ellipses from Beardsley et al. (1995) and EXP4: model and experiment ellipses are in good agreement.

Table 5

M_2 current ellipses, comparison: Beardsley et al. (1995)/EXP4 – phases are given in degrees Greenwich, indicating the phases maximum surface elevation flood (onshore) current and inclination (or orientation) of the semi-major axis (during ebb) given in degrees clockwise relative to north.

Latitude (°N)	Longitude (°W)	Semi-major axis ($m^2 s^{-1}$)	Semi-minor axis ($m^2 s^{-1}$)	Flood phase (°G)	Inclination (°N)
1.3	49.5	21.6/19.5	3.2/3.4	13/355.3	23/22.8
1.4	49.4	16.4 ± 1.7/17.1	3.8 ± 0.6/6.6	336.0 ± 11.0/346.5	31.0 ± 1.5/18.8
1.7	49.2	13.6 ± 1.4/15.6	5.5 ± 2.0/3.9	300.5 ± 9.5/298.4	49.0 ± 11.0/39.1
2.9	50.7	15.6 ± 1.7/17.2	1.3 ± 1.5/4.1	214.3 ± 5.5/211.1	12.0 ± 1.0/23.4
3.1	50.3	25.9 ± 6.0/33.0	3.2 ± 2.0/1.8	206.0 ± 7.5/201.9	29.7 ± 1.0/40.6
3.3	50.0	29.8 ± 0.8/33.6	0.0 ± 0.4/1.0	197.3 ± 5.0/200.0	33.7 ± 2.0/35.7
2.5	49.8	22.4 ± 1.6/28.7	4.7 ± 0.2/5.4	226.5 ± 8.5/222.0	46.0 ± 1.0/35.7
3.1	50.3	24.6 ± 0.5/31.3	2.6 ± 0.3/1.6	210.3 ± 1.1/203.0	31.5 ± 1.1/40.9
3.4	49.9	30.7 ± 0.5/36.7	2.6 ± 0.3/0.5	204.2 ± 0.9/195.7	36.8 ± 0.6/35.6
4.1	49.6	30.8 ± 0.7/42.95	−5.4 ± 0.6/−4.71	183.4 ± 1.3/184.3	35.6 ± 1.3/31.0

others uncertainties. Anyway, the bottom rugosity distribution is probably much more complex than described in our model and its temporal variability may influence the estuary tidal regime, making the use of observations even more difficult.

Fig. 11 presents the comparison between river plume extent and bottom friction rate of work for results obtained when using this repartition of z_0 . The similar structures of plume extent (Fig. 11a) and bottom friction rate of work (Fig. 11b) suggest that friction has an essential role into plume spread, as high friction stop the plume to spread into deep ocean.

5.5. Comparison with previously published works

Fig. 12 compares solution from Beardsley et al. (1995) and Gabioux et al. (2005) and from experience 4 (EXP4) with tidal gauges data from FEMAR (2000). Concerning Gabioux et al. (2005), we use the simulation presented in the article that is the closer to tidal gauges data. Table 4 sums up statistical scores when comparing EXP4 with FEMAR (2000) data, with a focus in zone 3.

These three solutions are, generally speaking, quite similar. Anyway, there are some differences. Beardsley et al. (1995) signal some limits in the interpolation they made.

In amplitude, comparing to Gabioux et al. (2005), EXP4 is closer to tidal gauges data, especially in the Amazon estuary (stations E4–E11). In phase, Gabioux et al. (2005) solution and EXP4 are once again similar. In some places, for instance in stations E2 and E3, EXP4 is closer to tidal gauges data, when in some other, for instance in stations E13 and E14, Gabioux et al. (2005) solution is the closest one. In many cases, for instance stations E9 and E11, both are equivalents.

Globally speaking, EXP4 can be considered an improvement comparing with tidal solutions previously published.

Fig. 13 shows the comparison between M_2 current ellipses from Beardsley et al. (1995) and the ones from EXP4, in the Amazon mouth and the Pará mouth, while Table 5 compares M_2 current ellipses values from AMASSEDs stations (Beardsley et al., 1995) with the ones from EXP4. This comparison shows a good agreement between measurement and modelling and confirms the level of model accuracy estimated from the comparison with the tide gauges.

6. Conclusion

It is well known that model bathymetry is a critical parameter for tidal simulations. In this paper, we have been able to reduce the data misfits by almost a factor two by reconstructing a more realistic topographic data set. The biggest improvements are seen in the Amazon mouth and the isle of Maracá (zones 2 and 3). These improvements consist mainly of a correction to the weak amplitude in these regions. Another critical parameter is the bottom friction. In our case, the use of a constant C_D parametrisation or a constant bottom rugosity length parametrisation leads to similar

results. More importantly, the local adjustment of the bottom friction moderately improves the accuracy of our tidal simulation.

Comparison with data shows the interest of EXP4 compared with previously published work, especially in the Amazon estuary. Therefore, a full regional tidal atlas is under construction using this configuration.

Additional experiments (not detailed in this paper) have shown that any further improvement would be very difficult to obtain with the current bathymetry and coastline. However, the bathymetry and shorelines available for this region have been recently improved. Because of the poor description of the Amazon estuary in the usual shoreline databases, we have created a new coastline, using nautical charts and airborne imagery. We are also building a more detailed bathymetry (AB2), and a mesh extended to Óbidos. The process of making the new mesh, coastline and bathymetry will be described in a subsequent contribution.

Due to the resonant response of the estuary to tide propagation (Fontes et al., 2008), as experienced in the work presented in this paper, we strongly believe that a new implementation based on this improved geophysical database will have the ability to allow further improvement in the tidal modelling.

The flexibility of the finite element discretisation allows us to continuously update the model geometry according to the additional information that is made available to the scientific community, in particular for the updates in shorelines or bathymetry databases due to the natural evolution of the Amazon estuary. A special effort was made in T-UGOm to offer the possibility to prescribe local values for bottom friction parameters. It might be necessary to extend this functionality to take into account the change with time of bottom shape and type of sediment.

As tides have a major effect on the spread of the Amazon plume (Fontes et al., 2008; Nikiema et al., 2007), it has been necessary to assure an accurate representations of tidal processes before investigates the downstream dynamics of the plume, which will be the next step of modelling in the AMANDES project.

Our next configuration will include the river flow, swell and waves, and trade-wind forcing. This will allow us to address advection and transport issues, the intricate interactions between all the 2D dynamical processes, and to further explore the connection between the River Amazon and the River Pará. The mixing layer depth issue will be studied in greater extent by using T-UGOm in its barotropic 3D mode, i.e. a 3D mode neglecting density gradient effects, but that take into account the 3D profile of currents. This mode requires less computations than a baroclinic 3D mode.

Acknowledgments

This study is part of the AMANDES project, supported by three French research agencies: IRD (Institut de Recherche pour le Développement), ANR (Agence Nationale de la Recherche), and CNRS/

INSU (Centre National de la Recherche Scientifique/Institut National des Sciences de l'Univers).

The authors thank Claude Estournel and Yves Du Penhoat who have read the draft version of this paper. We also thank Jean-Michel Martinez for providing satellite images, Jacques Callède for giving precisions about dynamics in Amazon estuary, and Laurent Roblou for his technical help.

Appendix A. C_D Calculation

A.1. For a logarithmic speed profile

According to Eqs. (15) and (18) – sea bed is artificially lifted up to z_0 :

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{H - z_0} \left(\int_{z_0}^H \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} dz \right) \mathbf{u}_\star = \frac{H}{\kappa(H - z_0)} \left(\ln \frac{H}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{H} \right) \mathbf{u}_\star,$$

then:

$$\mathbf{u}_\star = \frac{\kappa(H - z_0)}{H \left(\ln \frac{H}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{H} \right)} \bar{\mathbf{u}}. \quad (25)$$

According to Eq. (14):

$$\begin{aligned} \tau_b &= \rho \left| \frac{\kappa(H - z_0)}{H \left(\ln \frac{H}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{H} \right)} \right| \left\| \bar{\mathbf{u}} \right\| \frac{\kappa(H - z_0)}{H \left(\ln \frac{H}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{H} \right)} \bar{\mathbf{u}} \\ &= \rho \left(\frac{\kappa(H - z_0)}{H \left(\ln \frac{H}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{H} \right)} \right)^2 \left\| \bar{\mathbf{u}} \right\| \bar{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

and, according to Eq. (17):

$$C_D = \left(\frac{\kappa(H - z_0)}{H \left(\ln \frac{H}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{H} \right)} \right)^2. \quad (26)$$

A.2. For a logarithmic speed profile in a bottom mixing layer

When $H \leq H_c$, the whole speed profile is logarithmic. As a consequence, C_D formulation is exactly the same as in Appendix A.1:

$$C_D = \left(\frac{\kappa(H - z_0)}{H \left(\ln \frac{H}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{H} \right)} \right)^2. \quad (27)$$

When $H > H_c$, then, according Eq. (20):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \frac{1}{H - z_0} \left(\int_{z_0}^{H_c} \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \mathbf{u}_\star dz + \int_{H_c}^H \frac{1}{\kappa} \ln \frac{H_c}{z_0} \mathbf{u}_\star dz \right) \\ &= \frac{1}{\kappa(H - z_0)} \left(H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c + z_0 \right) \mathbf{u}_\star, \end{aligned}$$

so:

$$\mathbf{u}_\star = \frac{\kappa(H - z_0)}{H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c + z_0} \bar{\mathbf{u}}. \quad (28)$$

$H_c \gg z_0$, so $H \gg z_0$, then:

$$\mathbf{u}_\star \approx \frac{\kappa H}{H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c} \bar{\mathbf{u}}.$$

So, according Eq. (14):

$$\tau_b = \rho \left| \frac{\kappa H}{H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c} \right| \left\| \bar{\mathbf{u}} \right\| \frac{\kappa H}{H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c} \bar{\mathbf{u}} = \rho \left(\frac{\kappa H}{H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c} \right)^2 \left\| \bar{\mathbf{u}} \right\| \bar{\mathbf{u}},$$

and:

$$C_D = \left(\frac{\kappa H}{H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c} \right)^2. \quad (29)$$

Appendix B. Pedlosky's formulation calculation

According to Pedlosky (1987):

$$H_e = \sqrt{\frac{2\bar{K}}{f_c}}, \quad (30)$$

where \bar{K} is the vertical component of barotropic turbulent viscosity.

According to Stull (1988):

$$K = \kappa \|\mathbf{u}_\star\| z, \quad (31)$$

then:

$$\bar{K} = \frac{1}{H_e - z_0} \int_{z_0}^{H_e} \kappa \|\mathbf{u}_\star\| z dz = \frac{\kappa \|\mathbf{u}_\star\| (H_e + z_0)}{2}.$$

So, according to Eq. (30):

$$H_e^2 = \frac{\kappa \|\mathbf{u}_\star\| (H_e + z_0)}{f_c},$$

and according to Eq. (25):

$$H_e^2 = \frac{\kappa^2 (H_e - z_0) \|\bar{\mathbf{u}}\| (H_e + z_0)}{f_c H_e \left(\ln \frac{H_e}{z_0} + \frac{z_0 - H_e}{H_e} \right)}.$$

As we have seen before $H_c \gg z_0$, then $H_e \gg z_0$ and:

$$H_e \approx \frac{\kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|}{f_c \cdot \left(\ln \frac{H_e}{z_0} - 1 \right)}. \quad (32)$$

Appendix C. Dowden's formulation calculation

According to Dowden (1972):

$$H_c = \sqrt[5]{\frac{\bar{v}_T^2 a}{4\Omega^2}}, \quad (33)$$

where \bar{v}_T is the vertical component of the barotropic turbulent viscosity.

According to Nielsen (1992):

$$v_T = K \|\mathbf{u}_\star\| z, \quad (34)$$

then:

$$\bar{v}_T = \frac{1}{H_c - z_0} \int_{z_0}^{H_c} v_T dz = \frac{K \|\mathbf{u}_\star\| (H_c + z_0)}{2},$$

so, according to Eq. (33):

$$H_c^5 = \frac{K^2 \|\mathbf{u}_\star\|^2 (H_c + z_0)^2 a}{16\Omega^2}.$$

According to Eq. (25):

$$H_c^5 = \frac{K^2 \kappa^2 (H_c - z_0)^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 (H_c + z_0)^2 a}{16\Omega^2 \left(H_c \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c + z_0 \right)^2}.$$

$H_c \gg z_0$ so:

$$H_c^3 \approx \frac{K^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2 \left(\ln \frac{H_c}{z_0} - 1 \right)^2}. \quad (35)$$

References

- AmasSeds Group, 1990. A Multi-disciplinary Amazon Shelf SEDiment Study (AMASSEDS). *Eos, Transactions, American Geophysical Union* 45, 1771–1777.
- Amante, C., Barry, W.E., 2008. ETOPO1 1 Arc-Minute Global Relief Model: Procedures, Data Sources and Analysis. Tech. Rep., NOAA/NGDC, draft version: <ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/mgg/global/relief/ETOPO1/docs/ETOPO1.pdf>.
- Beardsley, R.C., Candela, J., Limeburner, R., Rockwell Geyer, W., Lentz, S.J., Castro, B.M., Cacchione, D., Carneiro, N., 1995. The M_2 tide on the Amazon shelf. *Journal of Geophysical Research* 100 (C2), 2283–2319.
- Callède, J., Cochonneau, G., Ronchail, J., Vieira Alvez, F., Guyot, J.-L., Santos Guimarães, V., de Oliveira, E., 2010. Les apports en eau de l'Amazonie à l'océan Atlantique. *Revue des sciences de l'eau* 23 (2).
- Carrère, L., Lyard, F., 2003. Modeling the barotropic response of the global ocean to atmospheric wind and pressure forcing – comparisons with observations. *Geophysical Research Letters* 30 (6), 1275.
- Chassaing, P., 2000. Turbulence en mécanique des fluides, Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur. Collection POLYTECH. Cépaduès-Éditions, 111, rue Nicolas-Vauquelin, F31100 Toulouse, France, October.
- Cushman-Roisin, B., 1994. Introduction to Geophysical Fluid Dynamics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Cushman-Roisin, B., Malačič, V., 1997. Bottom Ekman pumping with stress-dependent eddy viscosity. *Journal of Physical Oceanography* 27, 1967–1975.
- Dowden, J.M., 1972. An equatorial boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics* 56 (2), 193–200.
- Dronkers, J.J., 1964. Tidal Computations in Rivers and Coastal Waters. North-Holland, Amsterdam.
- FEMAR, 2000. Catalogo de estações maregráficas Brasileiras. Fundação de Estudos do Mar, Brazil. Available from: http://www.fundacaofemar.org.br/biblioteca/emb/cat_emb.html.
- Fontes, R.F.C., Castro, B.M., Beardsley, R.C., 2008. Numerical study of circulation on the inner Amazon Shelf. *Ocean Dynamics* 58, 187–198.
- Gabioux, M., 2002. Influência da lama em suspensão sobre a propagação da maré na plataforma Amazônica. Master's Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Brasil.
- Gabioux, M., Vinzón, S.B., Paiva, A.M., 2005. Tidal propagation over fluid mud layers on the amazon shelf. *Continental Shelf Research* 25, 113–125.
- Gallo, M.N., Vinzón, S.B., 2005. Generation of overtides and compound tides in Amazon estuary. *Ocean Dynamics* 55, 441–448.
- Gill, A.E., 1982. Atmosphere–Ocean Dynamics. International Geophysics Series, vol. 30, Academic Press, 111 Fifth Avenue, New York, NY 10003, United States of America.
- Gordev, V.V., Konnov, V.A., Konnova, Y.V., 1992. Nitrogen forms in the Amazon River and estuary. In: Degens, E.T. (Ed.), Interactions of Biogeochemical Cycles in Aqueous Systems, Part 7: SCOPE/UNEP Sonderband. Mitteilungen aus dem Geologisch-Paläontologischen Institut der Universität Hamburg. Scientific Committee on Problems of the Environment (SCOPE) and the United Nations Environment Program (UNEP), Hamburg: im Selbstverlag des Geologisch-Paläontologischen Institutes und des Institutes für Biogeochemie und Meereschemie des Universität Hamburg, Deutschland, pp. 133–147.
- Greenberg, D.A., Dupont, F., Lyard, F.H., Lynch, D.R., Werner, F.E., 2007. Resolution issues in numerical models of oceanic and coastal circulation. *Continental Shelf Research* 27, 1317–1343.
- IHO, 1990. Tidal Constituent Bank Station Catalogue. International Hydrographic Organization, 4 quai Antoine premier, B.P. 445, MC 98011 Monaco Cedex. Available from: <http://www.iho-ohi.net/english/home/>.
- Kinnmark, I.P.E., Gray, W.G., 1985. A generalized wave equation formulation of tidal circulation. In: Taylor et al. (Eds.), Proceedings of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows. Pineridge Press, Swansea, United Kingdom, pp. 1312–1324.
- Kosuth, P., Callède, J., Laraque, A., Filiozola, N., Guyot, J.-L., Seyler, P., Fritch, J.-M., 1999. Influence de la marée océanique sur le cours aval de l'Amazonie. In: Manaus'99, Hydrological and Geological Processes in Large Scale River Basins, HiBAm (CD-ROM).
- Legrand, S., Deleersnijder, E., Delhez, E., Legat, V., 2007. Unstructured, anisotropic mesh generation for the Northwestern European continental shelf, the continental slope and the neighbouring ocean. *Continental Shelf Research* 27, 1344–1356.
- Le Provost, C., Vincent, P., 1986. Some tests of precision for a finite element model of ocean tides. *Journal of Computational Physics* 65 (2), 273–291.
- Letellier, T., 2004. Étude des ondes de marée sur les plateaux continentaux. Ph.D. Thesis, Université Toulouse III – Paul Sabatier, 118, Route de Narbonne – F-31062 Toulouse Cedex 9, France.
- Lyard, F., Lefevre, F., Letellier, T., Francis, O., 2006. Modelling the global ocean tides: modern insights from FES2004. *Ocean Dynamics* 56 (5–6), 394–415.
- Lynch, D.R., Gray, W.G., 1979. A wave equation model for finite element tidal computations. *Computers and Fluids* 7, 207–228.
- Milliman, J.D., Meade, R.H., 1983. World-wide delivery of river sediment to the oceans. *The Journal of Geology* 91 (1), 1–21.
- Minster, J.-F., Genco, M.-L., Brossier, C., 1995. Variations of the sea level in the amazon estuary. *Continental Shelf Research* 15 (10), 1287–1302.
- Monahan, D., 2008. Mapping the floor of the entire world ocean: the general bathymetric chart of the oceans. *Journal of Ocean Technology* 3 (1), 108.
- Nielsen, P., 1992. Coastal bottom boundary layers and sediment transport. Advanced Series on Ocean Engineering, vol. 4, World Scientific, P.O. Box 128, Farrer Road, Singapore 9128.
- Nihoul, J.C.J., 1977. Three-dimensional model of tides and storm surges in a shallow well-mixed continental sea. *Dynamics of Atmospheres and Oceans* 2, 29–47.
- Nikiema, O., Devenon, J.-L., Baklouti, M., 2007. Numerical modeling of the Amazon River plume. *Continental Shelf Research* 27, 873–899.
- Pairaud, I.L., Lyard, F., Auclair, F., Letellier, T., Marsaleix, P., 2008. Dynamics of the semi-diurnal and quarter-diurnal internal tides in the Bay of Biscay. Part 1: barotropic tides. *Continental Shelf Research* 28, 1294–1315.
- Pedlosky, J., 1987. Geophysical Fluid Dynamics, second ed., Springer, New York, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, United States of America.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., 2002. Numerical Recipes in C++: The Art of Scientific Computing, second ed., Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 2RU, United Kingdom.
- Smith, W.H.F., Sandwell, D.T., 1997. Global seafloor topography from satellite altimetry and ship depth soundings. *Science* 277, 1957–1962.
- Soulsby, R.L., Hamm, L., Klopman, G., Myrhaug, D., Simons, R.R., Thomas, G.P., 1993. Wave–current interaction within and outside the bottom boundary layer. *Coastal Engineering* 21, 41–69.
- Stull, R.B., 1988. An Introduction to Boundary Layer Meteorology. Kluwer Academic Publishers, P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands.
- Vignudelli, S., Cipollini, P., Roblou, L., Lyard, F., Gasparini, G.P., Manzella, G., Astraldi, M., 2005. Improved satellite altimetry in coastal systems: Case study of the Corsica Channel (Mediterranean Sea). *Geophysical Research Letters*, 32.
- Werner, F.E., Lynch, D.R., 1986. Field studies with the wave equation formulation. In: Sá de Costa et al. (Eds.), Proceedings of the Sixth Conference on Finite Elements in Water Resources. Springer, 175, Fifth Avenue, New York, NY 10010, United States of America, pp. 547–560.
- Zakharova, E.A., Kouraev, A.V., Cazenave, A., Seyler, F., 2006. Amazon River discharge estimated from TOPEX/Poseidon altimetry. *Comptes Rendus Géoscience* 338 (3), 188–196.

3.2 Compléments méthodologiques

Certains points un peu techniques n'ont pas été développés dans l'article qui précède, mais méritent néanmoins d'être détaillés ici. Également, il convient d'étudier le comportement de la méthode de NEWTON dans le calcul de la profondeur de mélange. L'algorithme permettant de prescrire les zones de frottement de fond, quant à lui, est détaillé dans l'annexe A.

3.2.1 Partitionnement du domaine

Dans l'article, page 79 du présent mémoire (correspondant à la page 144 de la revue), il est indiqué que nous avons eu recours à des maillages dégénérés pour partitionner notre domaine. Le terme de maillage dégénéré indique qu'il s'agit de maillages dont les mailles n'ont pas toutes la même forme, mais peuvent être chacune un polygone quelconque.

Notre objectif est de définir une unique valeur de la longueur équivalente de rugosité z_0 . Pour cela, nous avons décidé de décrire des polygones sur le domaine et d'associer une valeur pour z_0 à chacun de ces polygones, ce qui permet de fixer sa valeur à l'intérieur de chacun de ces polygones. Afin d'éviter toute ambiguïté, il est préférable qu'aucun des polygones ne se chevauchent, c'est-à-dire que nous cherchons à réaliser une partition du domaine. Un maillage est une partition du domaine, de sorte que les outils pour réaliser des maillages permettent déjà d'assurer la propriété de non-chevauchement. Utiliser ces outils pour réaliser notre partition du domaine permet de limiter les développements, dans la mesure où il s'agit uniquement d'ajouter la possibilité pour notre outil de réaliser des polygones quelconques. De plus, cela permet d'économiser, pour l'utilisateur, l'apprentissage d'un nouvel outil.

En revanche, cela pose une difficulté pour le modèle. En effet, les informations que l'outil renvoie concernant cette partition du domaine n'est alors non pas les polygones eux-mêmes, mais des points (les sommets des polygones) et leurs connexions (les arêtes des polygones). Il faut donc reconstruire ces polygones, ce qui a nécessité le développement d'un algorithme original, détaillé dans l'annexe A.

3.2.2 Travail du frottement de fond et flux d'énergie

Dans l'étude publiée, nous nous sommes donc concentrés sur l'influence du frottement de fond. Afin de conduire de nombreuses modélisations, un spectre de marée très réduit a été exploité. Utiliser un tel spectre pour fixer le frottement est pertinent, dans la mesure où une modélisation avec un spectre plus large, telle que celle présentée dans le chapitre 4, ne présente que très peu de différence. De même, l'ajout du débit du fleuve, s'il change très légèrement et localement l'élévation due à la marée, n'a pas d'influence véritablement sensible. Quant aux courants extérieurs et au forçage du vent, leur influence se fait réellement sentir dans le devenir du panache du fleuve (voir par exemple [Nikiema *et al.*, 2007]).

La figure 3.1 montre le travail de ce frottement pour chacune des quatre expériences décrites précédemment.

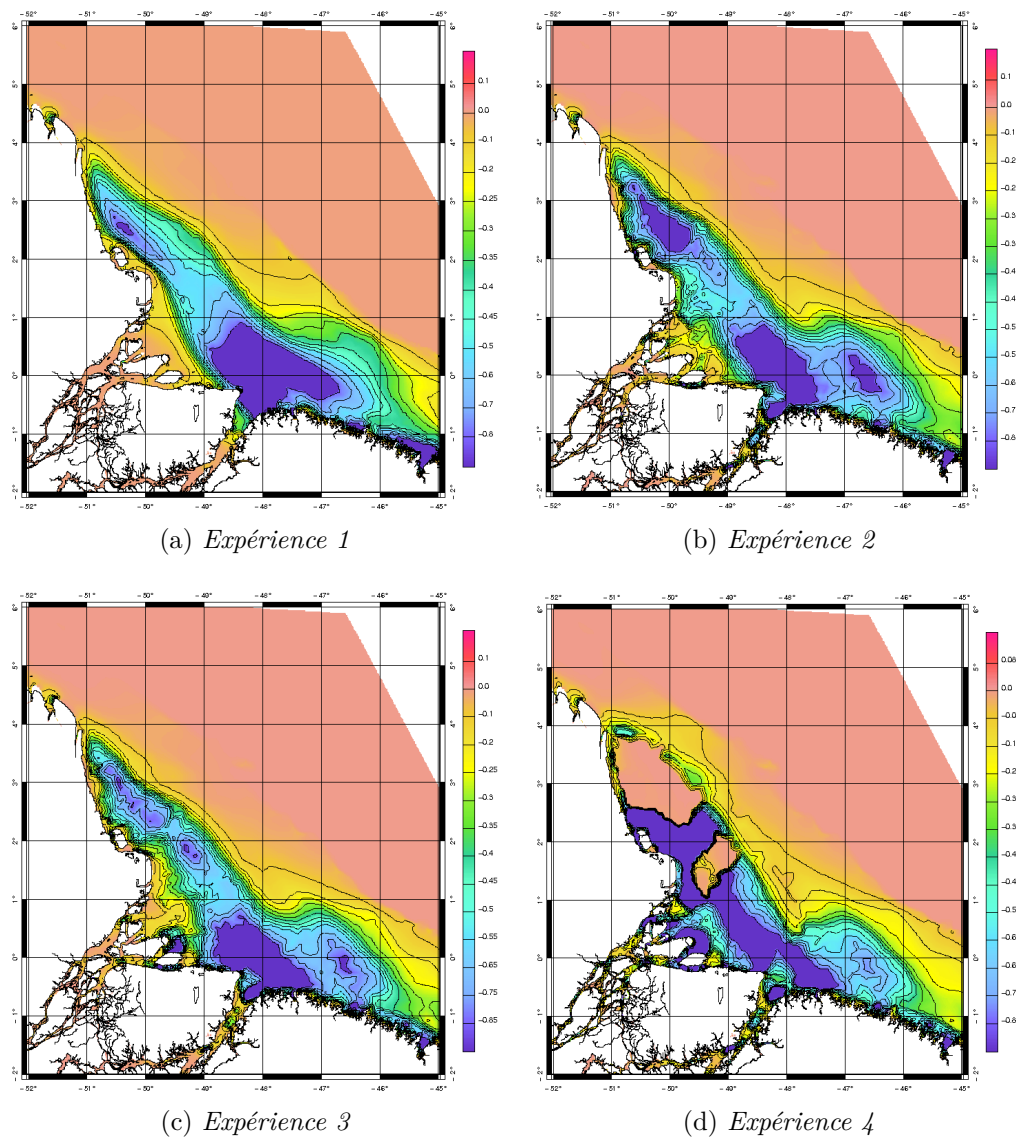
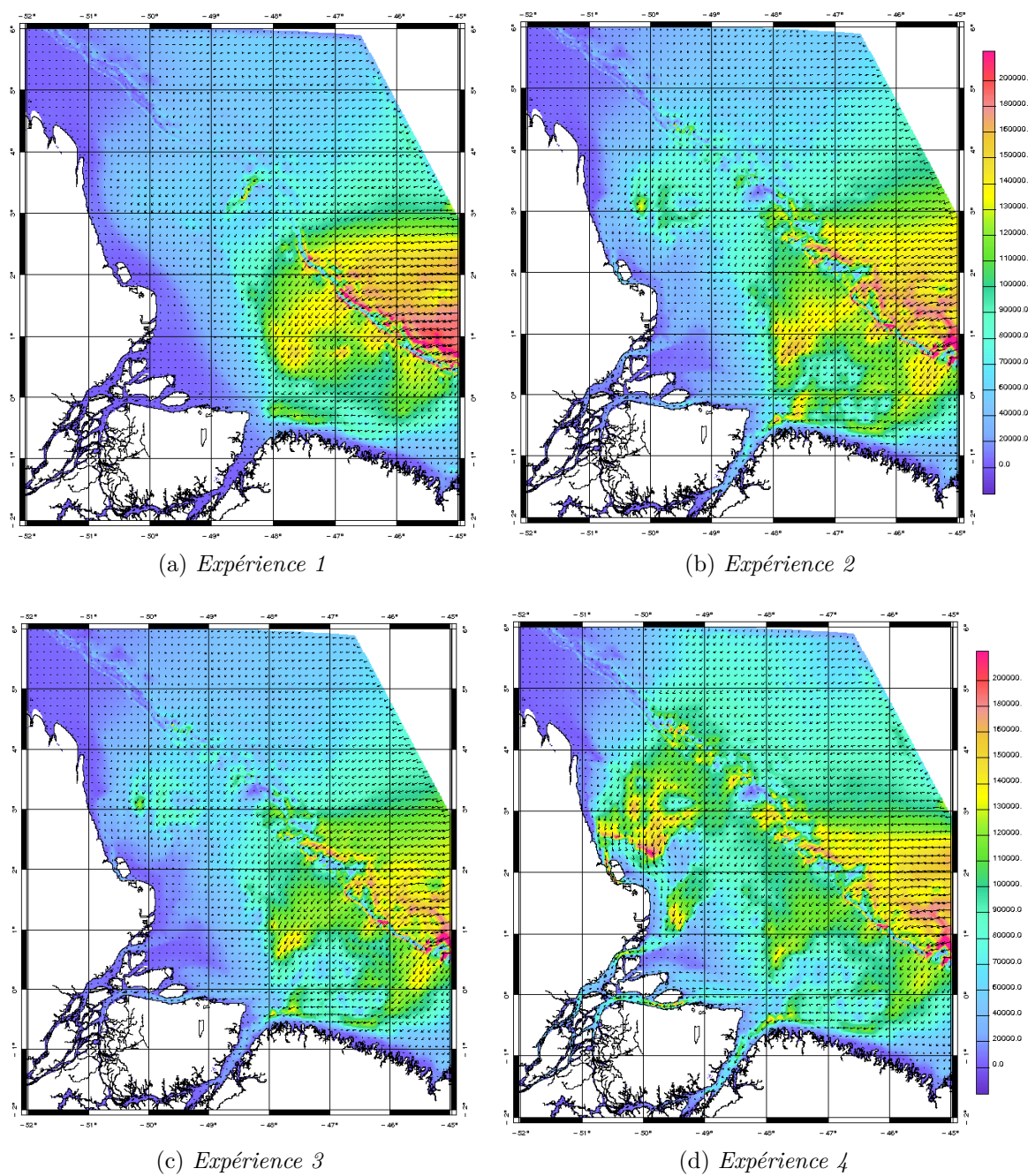


FIGURE 3.1 – Travail du frottement de fond (W m^{-2})

Dans chacune des quatre expériences, la configuration géographique est semblable. Toutefois, le simple changement de bathymétrie permet d'accentuer la dissipation par le frottement de fond, principalement au niveau de l'embouchure du fleuve Pará. Le changement de paramétrisation et surtout la prise en compte de la variabilité géographique du frottement de fond permet d'augmenter cette dissipation au niveau de l'estuaire de l'Amazonie et de quasiment l'annuler au niveau des zones de crème de vase.

La figure 3.2 présente les flux d'énergie pour chacune des quatre expériences menées.

FIGURE 3.2 – *Flux d'énergie (W m^{-1})*

Il apparaît que les flux proviennent principalement du sud-est de la zone. Dans le cas de l'expérience 1, la bathymétrie grossière bloque totalement le flux dans le fleuve Pará et le fleuve Amazone. Les flux les plus intenses sont localisés au niveau de la rupture du talus continental.

Le passage à la bathymétrie AB1 (expérience 2) permet au flux d'entrer sur le talus et dans les deux fleuves, tandis que le changement de paramétrisation effectué dans l'expérience 3 produit les mêmes flux, mais légèrement plus faibles. Dans ces deux cas, les plus fortes intensités de flux d'énergie sont localisées au sud-est de la zone, ce qui est cohérent avec l'excès d'amplitude constaté (voir l'article).

Enfin, prendre en compte la variation géographique de frottement de fond dans l'expérience 4 provoque un changement des flux dans tout le domaine, y compris en pleine mer. Les flux sont alors répartis de manière beaucoup plus équitable sur tout le domaine, avec de plus fortes intensités au niveau de la rupture du talus continental et dans les zones de crème de vase (zones de faibles frottements). Les intensités sont également plus fortes à l'intérieur des fleuves.

3.2.3 Comparaison de l'approche de MANNING et de celle de CHÉZY

Une des spécificités de la zone Amazone est que l'on y trouve aussi bien une zone océanique qu'une zone fluviale. Les zones fluviales sont couramment envisagées selon l'approche de MANNING¹. Notons :

- v la vitesse moyenne (unité SI : m s^{-1}), $v \in \mathbb{R}^+$;
- R_h le rayon hydraulique (unité SI : m), $R_h \in \mathbb{R}^+$;
- S la pente de la ligne d'eau (unité SI : m), $S \in \mathbb{R}^+$;
- n le coefficient de GAUCKLER-MANNING² (unité SI : m s), $n \in \mathbb{R}^+$. Il dépend de nombreux paramètres, tel que le type de matériaux de fond ou la forme du canal ; en conséquence, il est généralement déterminé de manière empirique.

À l'équilibre (voir par exemple [Dronkers, 1964]) :

$$v = \frac{R_h^{2/3} S^{1/2}}{n}. \quad (3.2.1)$$

T-UGOm est un modèle conçu pour la modélisation océanique, son approche est donc hydrodynamique, c'est-à-dire plus proche de celle de CHÉZY³. Notons C le coefficient de CHÉZY (unité SI : $\text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$), $C \in \mathbb{R}^+$. La formule de CHÉZY s'écrit ainsi :

$$v = C (R_h S)^{1/2}. \quad (3.2.2)$$

Néanmoins, ces deux approches sont équivalentes, car les équations 3.2.1 et 3.2.2 conduisent à :

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n}.$$

1. Robert MANNING (1816 - 1897)

2. Philippe GAUCKLER (1826 - 1905)

3. Antoine CHÉZY (1718 - 1798)

En raison de cette équivalence, nous avons opté pour une approche entièrement hydrodynamique dans tout le domaine.

3.2.4 Formulation du coefficient de traînée

En complément du chapitre 1, notons :

- $\kappa = 0,4$ la constante de von Kármán⁴ ;
- $H_c(x, y, t)$ la hauteur de la couche de mélange (unité SI : m), $H_c \in \mathbb{R}^+$;
- $z_0(x, y)$ le coefficient de rugosité (unité SI : m), $z_0 \in \mathbb{R}^+$;
- $\mathbf{u}_\star(x, y, t)$ la vitesse efficace (unité SI : m s^{-1}), $\mathbf{u}_\star \in \mathbb{R}^2$;
- $C_D(x, y, t)$ le coefficient de frottement (grandeur sans dimension), $C_D \in \mathbb{R}^+$. D'après [Dronkers, 1964] : $C_D = g/c^2$.

Posons : $z' = z - h$, donc $dz' = dz$.

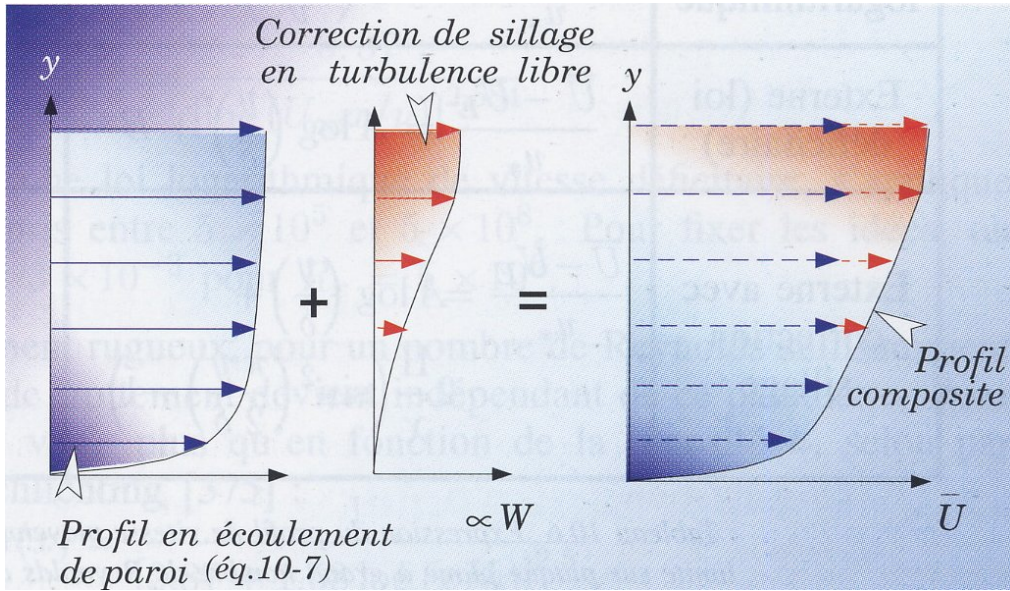


FIGURE 3.3 – Un exemple de profil de vitesse dans la couche turbulente
source : [Chassaing, 2000b]

À l'extérieur de la zone de mélange, le profil de vitesse sur la verticale est relativement homogène et peut être considéré comme constant. Au sein de la couche de mélange, en revanche, elle est très hétérogène (voir figure 3.3). Pour approcher un tel profil, nous avons utilisé la paramétrisation suivante :

$$\mathbf{u}(x, y, z', t) = \begin{cases} \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z'}{z_0} \mathbf{u}_\star(x, y, t) & \text{pour } z_0 < z' \leq H_c, \\ \frac{1}{\kappa} \ln \frac{H_c}{z_0} \mathbf{u}_\star(x, y, t) & \text{pour } H_c < z' \leq H. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Ce qui donne le profil de vitesse de la figure 3.4.

4. Theodore von Kármán (1881 - 1963)

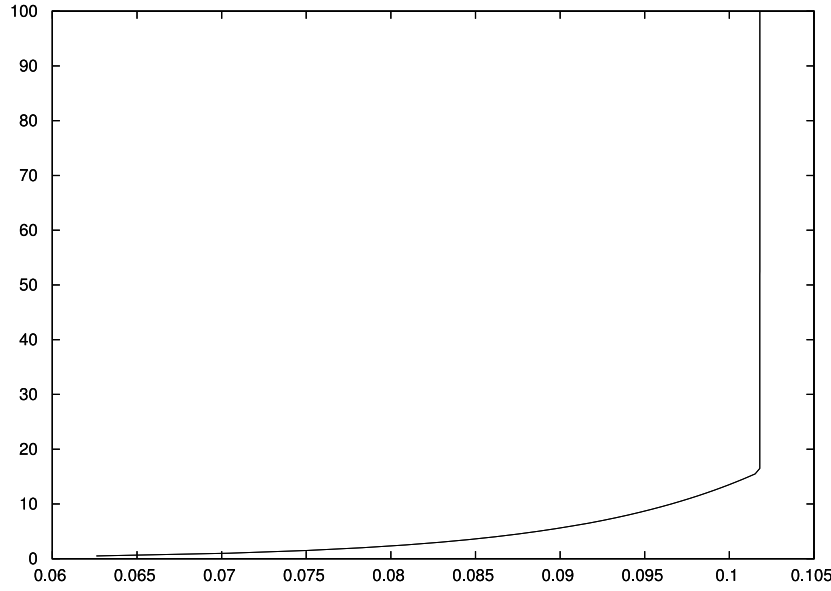


FIGURE 3.4 – Profil de \mathbf{u} (en m s^{-1}) en fonction de z' (en m) avec $z_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $\|\bar{\mathbf{u}}\| = 10^{-1} \text{ m s}^{-1}$ et $H = 100 \text{ m}$

D'après [Cushman-Roisin et Malačič, 1997], le stress de fond s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}_b = \rho \|\mathbf{u}_*\| \mathbf{u}_*. \quad (3.2.4)$$

En mode barotrope, on intègre sur la hauteur d'eau, de sorte que l'on a seulement accès à la vitesse moyenne $\bar{\mathbf{u}}$, définie par (on élève artificiellement le fond de la mer de z_0) :

$$\bar{\mathbf{u}}(x, y, t) = \frac{1}{H - z_0} \int_{z_0}^H \mathbf{u}(x, y, z', t) dz'.$$

On a $\lim_{H \rightarrow z_0} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$. Ce cas se présente lorsque la hauteur d'eau est inférieure au coefficient de rugosité, c'est-à-dire lorsque toute l'eau s'est retirée du point observé (cas découvrant). Il n'y a alors pas lieu de calculer l'élévation de l'eau. Cependant, les valeurs en ce point ont une influence sur leurs voisins, on peut donc être amené à le traiter. Ce cas a bien une signification physique, un exemple marquant en est le Mont Saint-Michel, qui, en fonction de la marée haute ou basse, est soit une île soit un mont sur une plage. Une solution possible, qui est utilisée dans le modèle numérique T-UGOm, est de traiter ce cas à part et, pour ses voisins, considérer que la hauteur d'eau est non pas nulle, mais petite – par exemple $H = z_0 + \epsilon$, ϵ dépendant de la précision des calculs. Dans la suite, on peut donc considérer que $H > z_0$.

Pour faire le lien entre le stress de fond et la vitesse moyenne, on a recours à un coefficient de frottement correcteur C_D et alors $\boldsymbol{\tau}_b = \rho C_D \|\bar{\mathbf{u}}\| \bar{\mathbf{u}}$. Il faut donc déterminer C_D .

Lorsque $H \leq H_c$

Si $H \leq H_c$, alors on a toujours $z_0 \leq z' \leq H_c$ et donc :

$$\mathbf{u}(x, y, z', t) = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z'}{z_0} \mathbf{u}_*(x, y, t),$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \frac{1}{H - z_0} \int_{z_0}^H \mathbf{u}(x, y, z', t) dz' \\ &= \frac{1}{H - z_0} \int_{z_0}^H \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z'}{z_0} \mathbf{u}_*(x, y, t) dz'. \end{aligned}$$

Soit $X = \frac{z'}{z_0}$, donc $dX = \frac{dz'}{z_0}$ et :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \frac{z_0}{\kappa(H - z_0)} \mathbf{u}_* \int_1^{\frac{H}{z_0}} \ln X dX \\ &= \frac{z_0}{\kappa(H - z_0)} \mathbf{u}_* [X \ln X - X]_1^{\frac{H}{z_0}} \\ &= \frac{z_0}{\kappa(H - z_0)} \left(\frac{H}{z_0} \ln \frac{H}{z_0} - \frac{H}{z_0} + 1 \right) \mathbf{u}_* \\ &= \frac{z_0}{\kappa(H - z_0)} \left(\frac{H}{z_0} \left(\ln \frac{H}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{H} \right) \right) \mathbf{u}_* \\ &= \frac{H}{\kappa(H - z_0)} \left(\ln \frac{H}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{H} \right) \mathbf{u}_*. \end{aligned}$$

Soit $Y = \frac{H}{z_0}$. $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $H \in]z_0 ; +\infty[$, donc $Y \in]1 ; +\infty[$. Soit :

$$f(Y) = \ln Y - 1 + \frac{1}{Y}, \quad (3.2.5)$$

donc :

$$\frac{df}{dY}(Y) = \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y^2} = \frac{Y - 1}{Y^2}, \quad (3.2.6)$$

or :

$$Y > 1 \implies Y - 1 > 0,$$

donc, d'après l'équation 3.2.6 :

$$\frac{df}{dY}(Y) > 0,$$

donc f est strictement croissante.

$$\lim_{Y \rightarrow 1^+} f(Y) = \ln 1 - 1 + 1 = 0,$$

$$\lim_{Y \rightarrow +\infty} \ln Y = +\infty,$$

$$\lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{1}{Y} = 0,$$

$$\implies \lim_{Y \rightarrow +\infty} f(Y) = +\infty.$$

Donc f ne s'annule jamais, ce qui donne :

$$\mathbf{u}_\star = \frac{\kappa(H - z_0)}{H \left(\ln \frac{H}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{H} \right)} \bar{\mathbf{u}}, \quad (3.2.7)$$

donc, d'après l'équation 3.2.4 :

$$\boldsymbol{\tau}_b = \rho \|\mathbf{u}_\star\| \mathbf{u}_\star = \rho \left| \frac{\kappa(H - z_0)}{H \left(\ln \frac{H}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{H} \right)} \right| \|\bar{\mathbf{u}}\| \frac{\kappa(H - z_0)}{H \left(\ln \frac{H}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{H} \right)} \bar{\mathbf{u}}.$$

$H > z_0$ donc $H > 0$ et $H - z_0 > 0$ et de ce qui précède, $\ln \frac{H}{z_0} - 1 + \frac{z_0}{H} > 0$, donc :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_b &= \frac{\rho \kappa^2 (H - z_0)^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|}{H^2 \left(\ln \frac{H}{z_0} + \frac{z_0 - H}{H} \right)^2} \bar{\mathbf{u}} \\ &= \rho \left(\frac{\kappa(H - z_0)}{H \ln \frac{H}{z_0} + z_0 - H} \right)^2 \|\bar{\mathbf{u}}\| \bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

et donc le coefficient de traînée s'écrit ainsi :

$$C_D = \left(\frac{\kappa(H - z_0)}{H \ln \frac{H}{z_0} + z_0 - H} \right)^2. \quad (3.2.9)$$

Lorsque $H > H_c$

Dans ce cas, d'après l'équation 3.2.3 :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(x, y, t) &= \frac{1}{H - z_0} \int_{z_0}^H \mathbf{u}(x, y, z', t) dz' \\ &= \frac{1}{H - z_0} \left(\int_{z_0}^{H_c} \mathbf{u}(x, y, z', t) dz' + \int_{H_c}^H \mathbf{u}(x, y, z', t) dz' \right) \\ &= \frac{1}{H - z_0} \left(\int_{z_0}^{H_c} \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z'}{z_0} \mathbf{u}_\star(x, y, t) dz' + \int_{H_c}^H \frac{1}{\kappa} \ln \frac{H_c}{z_0} \mathbf{u}_\star(x, y, t) dz' \right) \\ &= \frac{1}{\kappa(H - z_0)} \left(\int_{z_0}^{H_c} \ln \frac{z'}{z_0} dz' + \ln \frac{H_c}{z_0} \int_{H_c}^H dz' \right) \mathbf{u}_\star(x, y, t) \\ &= \frac{1}{\kappa(H - z_0)} \left(z_0 [X \ln X - X]_1^{\frac{H_c}{z_0}} + \ln \frac{H_c}{z_0} (H - H_c) \right) \mathbf{u}_\star(x, y, t) \\ &= \frac{1}{\kappa(H - z_0)} \left(H_c \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c + z_0 + H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c \ln \frac{H_c}{z_0} \right) \mathbf{u}_\star(x, y, t) \\ &= \frac{1}{\kappa(H - z_0)} \left(H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c + z_0 \right) \mathbf{u}_\star(x, y, t). \end{aligned}$$

La littérature donne comme ordre de grandeur courant $H_c \sim 20$ m et $z_0 \sim 2$ mm, c'est-à-dire que $H_c \gg z_0$. Donc, dans le cas d'un océan, les ordres de grandeurs sont tels

que $\frac{H_c}{z_0} > e$, donc $\ln \frac{H_c}{z_0} > 1$. Nous sommes dans le cas où $H > H_c$, donc $H \ln \frac{H_c}{z_0} > H_c$, donc $H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c > 0$. Or $z_0 > 0$, donc $H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c + z_0 \neq 0$, ce qui entraîne :

$$\mathbf{u}_\star = \frac{\kappa (H - z_0)}{H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c + z_0} \bar{\mathbf{u}}. \quad (3.2.10)$$

Nous avons vu que les ordres de grandeurs sont tels que $H_c \gg z_0$, donc $H \gg z_0$, ce qui entraîne :

$$\mathbf{u}_\star \approx \frac{\kappa H}{H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c} \bar{\mathbf{u}}.$$

Donc, d'après l'équation 3.2.4 :

$$\boldsymbol{\tau}_b = \rho \|\mathbf{u}_\star\| \mathbf{u}_\star \approx \rho \left| \frac{\kappa H}{H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c} \right| \|\bar{\mathbf{u}}\| \frac{\kappa H}{H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c} \bar{\mathbf{u}}.$$

Nous avons vu précédemment que $H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c > 0$ et, d'autre part, $H > 0$ et $\kappa = 0,4 > 0$, donc :

$$\boldsymbol{\tau}_b \approx \rho \left(\frac{\kappa H}{H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c} \right)^2 \|\bar{\mathbf{u}}\| \bar{\mathbf{u}} \quad (3.2.11)$$

et :

$$C_D \approx \left(\frac{\kappa H}{H \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c} \right)^2. \quad (3.2.12)$$

3.2.5 Formulation de PEDLOSKY

Notons :

- $\bar{K}(x, y, t)$ la composante verticale de la viscosité turbulente barotrope ou viscosité turbulente moyenne (unité SI : $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$), $\bar{K} \in \mathbb{R}^+$;
- $H_e(x, y, t)$ la hauteur de la couche d'EKMANN⁵ de fond (unité SI : m), $H_e \in \mathbb{R}^+$.

D'après [Pedlosky, 1987] :

$$H_e = \sqrt{\frac{2\bar{K}}{f_c}}. \quad (3.2.13)$$

À la suite de [Letellier, 2004], considérons que $H_c = H_e$. Toutefois, cette formulation pose problème à l'équateur, car alors $f_c = 0$. Pour la suite, nous nous plaçons dans le cas où $f_c \neq 0$.

D'après [Stull, 1988], $K(x, y, z', t)$, la composante verticale de la viscosité turbulente (unité SI : $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$), $K \in \mathbb{R}^+$, peut être paramétrée en fonction de la profondeur z' de la sorte :

$$K = \kappa \|\mathbf{u}_\star\| z'. \quad (3.2.14)$$

5. Vagn Walfrid EKMANN (1874 – 1954)

Le coefficient de rugosité est une valeur en deçà de laquelle on considère qu'il n'y a pas d'eau (on relève de manière artificielle le niveau du fond de l'océan), donc :

$$\overline{K} = \frac{1}{H_e - z_0} \int_{z_0}^{H_e} K dz'.$$

$\lim_{H_e \rightarrow z_0} \overline{K} = 0$, ce qui signifie soit que le fluide est totalement non-visqueux, ce qui n'est pas le cas de l'eau de mer, soit qu'il n'y a pas de turbulence, c'est-à-dire pas de frottement de fond. Ce dernier cas se présente lorsque le fluide est au repos, ce qui ne constitue pas un cas d'intérêt dans le cas de la modélisation océanique. En conséquence, il est légitime, comme nous l'avons fait précédemment, de considérer que $H_e \neq z_0$. Donc :

$$\begin{aligned} \overline{K} &= \frac{1}{H_e - z_0} \int_{z_0}^{H_e} \kappa \|\mathbf{u}_\star\| z' dz' \\ &= \frac{\kappa \|\mathbf{u}_\star\|}{H_e - z_0} \int_{z_0}^{H_e} z dz' \\ &= \frac{\kappa \|\mathbf{u}_\star\|}{2(H_e - z_0)} \left[z'^2 \right]_{z_0}^{H_e} \\ &= \frac{\kappa \|\mathbf{u}_\star\| (H_e^2 - z_0^2)}{2(H_e - z_0)} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\overline{K} = \frac{\kappa \|\mathbf{u}_\star\| (H_e + z_0)}{2}. \quad (3.2.15)$$

Donc, d'après l'équation 3.2.13 :

$$H_e^2 = \frac{\kappa \|\mathbf{u}_\star\| (H_e + z_0)}{f_c}$$

et d'après l'équation 3.2.7 :

$$H_e^2 = \frac{\kappa^2 (H_e + z_0) \|\overline{\mathbf{u}}\| |H_e - z_0|}{f_c |H_e| \left| \ln \frac{H_e}{z_0} + \frac{z_0 - H_e}{H_e} \right|}.$$

$H_e \in \mathbb{R}^+ \setminus \{z_0\}$ et, d'après la sous-section 3.2.4, $\ln \frac{H_e}{z_0} - \frac{z_0 - H_e}{H_e} > 0$, donc :

$$H_e^2 = \frac{\kappa^2 (H_e + z_0) \|\overline{\mathbf{u}}\| |H_e - z_0|}{f_c H_e \left(\ln \frac{H_e}{z_0} + \frac{z_0 - H_e}{H_e} \right)}.$$

Lorsque $H_e = 0$, la situation est paradoxale puisque :

$$\begin{aligned} \lim_{H_e \rightarrow 0^+} \kappa^2 (H_e + z_0) \|\overline{\mathbf{u}}\| |H_e - z_0| &= \kappa^2 z_0^2 \|\overline{\mathbf{u}}\|, \\ \lim_{H_e \rightarrow 0^+} f_c H_e \left(\ln \frac{H_e}{z_0} + \frac{z_0 - H_e}{H_e} \right) &= 0^+, \\ \Rightarrow \lim_{H_e \rightarrow 0^+} H_e^2 &= +\infty, \end{aligned}$$

ce qui signifie que 0 n'est jamais solution de l'équation et donc $H_e \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{z_0\}$.

Or, nous avons vu que $H_c \gg z_0$, donc $H_e \gg z_0$, ce qui permet d'exprimer la hauteur de la couche d'EKMAN de la façon suivante :

$$H_e \approx \frac{\kappa^2 \|\overline{\mathbf{u}}\|}{f_c \cdot \left(\ln \frac{H_e}{z_0} - 1\right)}. \quad (3.2.16)$$

3.2.6 Formulation de DOWDEN

D'après [Dowden, 1972], pour $\overline{\nu_T}(x, y, t)$ la composante verticale de la viscosité turbulente barotrope (ou viscosité turbulente moyenne) (unité SI : $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$), $\overline{\nu_T} \in \mathbb{R}^+$ et $\Omega = \|\boldsymbol{\Omega}\| = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$ le taux de rotation de la Terre (on rappelle que $a = 6371 \cdot 10^3 \text{m}$ est le rayon d'une sphère ayant le même volume que la Terre), la hauteur de la couche critique s'exprime ainsi :

$$H_c = \sqrt[5]{\frac{\overline{\nu_T}^2 a}{4\Omega^2}}. \quad (3.2.17)$$

D'après [Nielsen, 1992], pour $0,10 < k_N < 0,13$ une constante jouant le même rôle que la constante de von Kármán, mais trois à quatre fois inférieure à cette dernière et qui prend en compte les caractéristiques du fluide étudié, $\nu_T(x, y, z', t)$, la composante verticale de la viscosité turbulente (unité SI : $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$), $\nu_T \in \mathbb{R}^+$, peut être paramétrisée en fonction de la profondeur z' de la sorte :

$$\nu_T = k_N \|\mathbf{u}_\star\| z'. \quad (3.2.18)$$

Le coefficient de rugosité est une valeur en deçà de laquelle on considère qu'il n'y a pas d'eau (on relève de manière artificielle le niveau du fond de l'océan), donc :

$$\overline{\nu_T} = \frac{1}{H_c - z_0} \int_{z_0}^{H_c} \nu_T dz'$$

$\lim_{H_c \rightarrow z_0} \overline{\nu_T} = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a pas de viscosité turbulente. Une fois encore, cela a lieu lorsque le fluide est non-visqueux, donc pas dans le cas de l'eau de mer, ou lorsque le fluide est au repos, cas qui ne nous intéresse pas. Par la suite, on considère donc que $H_c \neq z_0$ et donc :

$$\begin{aligned} \overline{\nu_T} &= \frac{1}{H_c - z_0} \int_{z_0}^{H_c} k_N \|\mathbf{u}_\star\| z' dz' \\ &= \frac{k_N \|\mathbf{u}_\star\|}{H_c - z_0} \int_{z_0}^{H_c} z' dz' \\ &= \frac{k_N \|\mathbf{u}_\star\|}{2(H_c - z_0)} \left[z'^2 \right]_{z_0}^{H_c} \\ &= \frac{k_N \|\mathbf{u}_\star\| (H_c^2 - z_0^2)}{2(H_c - z_0)} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\overline{\nu_T} = \frac{k_N \|\mathbf{u}_\star\| (H_c + z_0)}{2}. \quad (3.2.19)$$

Donc, d'après l'équation 3.2.17 :

$$H_c^5 = \frac{k_N^2 \|\mathbf{u}_\star\|^2 (H_c + z_0)^2 a}{16\Omega^2}.$$

$$\lim_{H_c \rightarrow 0^+} H_c^5 = \frac{k_N^2 \|\mathbf{u}_\star\|^2 z_0^2 a}{16\Omega^2},$$

donc, sauf dans les cas où l'océan n'est pas en mouvement, qui n'est pas un cas qui nous intéresse, $H_c \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{z_0\}$. Soit :

$$r(x) = x \ln \frac{x}{z_0} - x + z_0,$$

alors :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dx}(x) &= \ln \frac{x}{z_0} + \frac{1}{z_0} \frac{z_0}{x} x - 1 \\ &= \ln \frac{x}{z_0} \end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned} \ln \frac{x}{z_0} = 0 &\Rightarrow \frac{x}{z_0} = 1 \\ &\Rightarrow x = z_0, \end{aligned}$$

ce qui donne le tableau de signe suivant :

x	0	z_0	$+\infty$
$\frac{dr}{dx}(x)$		-	+

$$\begin{aligned} r(x) &= x \left(\ln \frac{x}{z_0} - 1 \right) + z_0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} r(x) &= z_0, \\ r(z_0) &= z_0 \ln \frac{z_0}{z_0} - z_0 + z_0 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{z_0} &= +\infty \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) &= +\infty, \end{aligned}$$

ce qui donne le tableau de variation suivant :

x	0	z_0	$+\infty$
$\frac{dr}{dx}(x)$		$\begin{array}{c} - \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ + \end{array}$	
$r(x)$		$\begin{array}{ccc} z_0 & & +\infty \\ & \searrow & \nearrow \\ & 0 & \end{array}$	

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{z_0\}$, $r(x) \neq 0$, donc, d'après l'équation 3.2.7, pour $H_c \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{z_0\}$:

$$H_c^5 = \frac{k_N^2 \kappa^2 (H_c - z_0)^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 (H_c + z_0)^2 a}{16\Omega^2 \left(H_c \ln \frac{H_c}{z_0} - H_c + z_0 \right)^2}. \quad (3.2.20)$$

On a vu que $H_c \gg z_0$, ce qui permet d'exprimer la couche limite de la sorte :

$$H_c^3 = \frac{k_N^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2 \left(\ln \frac{H_c}{z_0} - 1 \right)^2}. \quad (3.2.21)$$

3.2.7 Convergence de la méthode de NEWTON pour les paramétrisations de la couche de mélange

Cas de la formulation de PEDLOSKY

Dans le cas de la formulation de PEDLOSKY, on assimile la couche de mélange H_c à la couche d'EKMAN de fond H_e , paramétrée par l'équation 3.2.16.

Cette équation possède bien une solution, mais elle ne peut pas être déterminée de manière analytique. Il faut donc procéder à une étude de l'équation en vue de sa résolution de manière approchée. D'après ce qui précède, nous nous plaçons dans le cas où $f_c \in \mathbb{R}_+^*$, $\|\bar{\mathbf{u}}\| \in \mathbb{R}^+$, $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $H_e \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{z_0\}$ et $\kappa = 0, 4$. D'après l'équation 3.2.16 :

$$H_e \left(\ln \frac{H_e}{z_0} - 1 \right) - \frac{\kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|}{f_c} = 0. \quad (3.2.22)$$

Pour $z' \in \mathbb{R}_+^*$, posons :

$$m(z') = z' \left(\ln \frac{z'}{z_0} - 1 \right) - \frac{\kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|}{f_c}, \quad (3.2.23)$$

alors :

$$\frac{dm}{dz'}(z') = \ln \frac{z'}{z_0} \quad (3.2.24)$$

et H_e , la solution de l'équation 3.2.16, est l'un des zéros (s'il y en a au moins un) de m .

$$\frac{dm}{dz'}(z') > 0 \implies z' > z_0,$$

ce qui donne le tableau de signe suivant :

z'	0	z_0	$+\infty$
$\frac{dm}{dz'}(z')$	-	0	+

$$\begin{aligned} \lim_{z' \rightarrow 0^+} \ln \frac{z'}{z_0} - 1 &= -\infty \\ \Rightarrow \lim_{z' \rightarrow 0^+} m(z') &= 0, \\ m(z_0) &= -z_0 - \frac{\kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|}{f_c}, \\ \lim_{z' \rightarrow +\infty} \ln \frac{z'}{z_0} &= +\infty \\ \Rightarrow \lim_{z' \rightarrow +\infty} m(z') &= +\infty, \end{aligned}$$

nous avons donc le tableau de variations suivant :

z'	0	z_0	$+\infty$
$\frac{dm}{dz'}(z')$	-	0	+
$m(z')$	$-\frac{\kappa^2 \ \bar{\mathbf{u}}\ }{f_c}$	$-z_0 - \frac{\kappa^2 \ \bar{\mathbf{u}}\ }{f_c}$	$+\infty$

$\kappa = 0, 4$, $\|\bar{\mathbf{u}}\| \in \mathbb{R}^+$, $f_c \in \mathbb{R}_+^*$ et $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$, donc $-\frac{\kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|}{f_c} \leq 0$ et $-z_0 - \frac{\kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|}{f_c} \leq 0$, donc g s'annule une fois et une seule sur $]z_0; +\infty[$ et on retrouve bien que ni 0 ni z_0 ne sont solutions de l'équation 3.2.16.

Connaissant m et $\frac{dm}{dz'}$, la méthode de NEWTON (voir par exemple [Press *et al.*, 2002]) permet de calculer efficacement H_e . Dans un premier temps, nous avons comparé les résultats donnés par l'approximation $H_e \gg z_0$ à ceux utilisant la formulation exacte. Le tableau 3.1 résume les résultats. Au vu de ces résultats, on constate que cette approximation est totalement légitime.

Le tableau 3.2 résume quelques valeurs de H_e en fonction de la latitude et de la vitesse.

La figure 3.5 montre différents profils de C_D obtenus avec cette paramétrisation pour $z_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ m.

z_0 (m)	$\ \bar{\mathbf{u}}\ $ (m s ⁻¹)	f_c (m s ⁻²)	H_e (m)	erreur sur H_e (%)
$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-1}	$5 \cdot 10^{-5}$	36,33	$5,62 \cdot 10^{-4}$
$2 \cdot 10^{-4}$	10^{-1}	$7,292 \cdot 10^{-5}$	20,79	$8,33 \cdot 10^{-5}$
10^{-4}	$5 \cdot 10^{-1}$	$1,4584 \cdot 10^{-4}$	45,60	$1,68 \cdot 10^{-5}$
$2,5 \cdot 10^{-5}$	10^{-2}	$1,4584 \cdot 10^{-5}$	9,28	$2,10 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$	36,03	$4,59 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^{-3}$	5	$5 \cdot 10^{-5}$	1292,52	$1,16 \cdot 10^{-5}$

TABLE 3.1 – *Erreur maximum commise sur H_e par l'approximation (précision : 10^{-10}), pour une profondeur de 0 m à 4 000 m dans le cas de la formulation de PEDLOSKY*

latitude (°) \ $\ \bar{\mathbf{u}}\ $ (m s ⁻¹)	10^{-1}	$5 \cdot 10^{-1}$	1
60	36,00	154,42	290,89
45	43,19	185,78	350,28
30	59,03	255,00	481,54
15	107,16	466,43	883,22
10	154,06	673,44	1277,17
5	289,19	1272,67	2419,61
1	1271,24	5670,35	10834,5
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

TABLE 3.2 – *H_e en m en fonction de la latitude et de $\|\bar{\mathbf{u}}\|$ pour $z_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ m dans le cas de la formulation de PEDLOSKY*

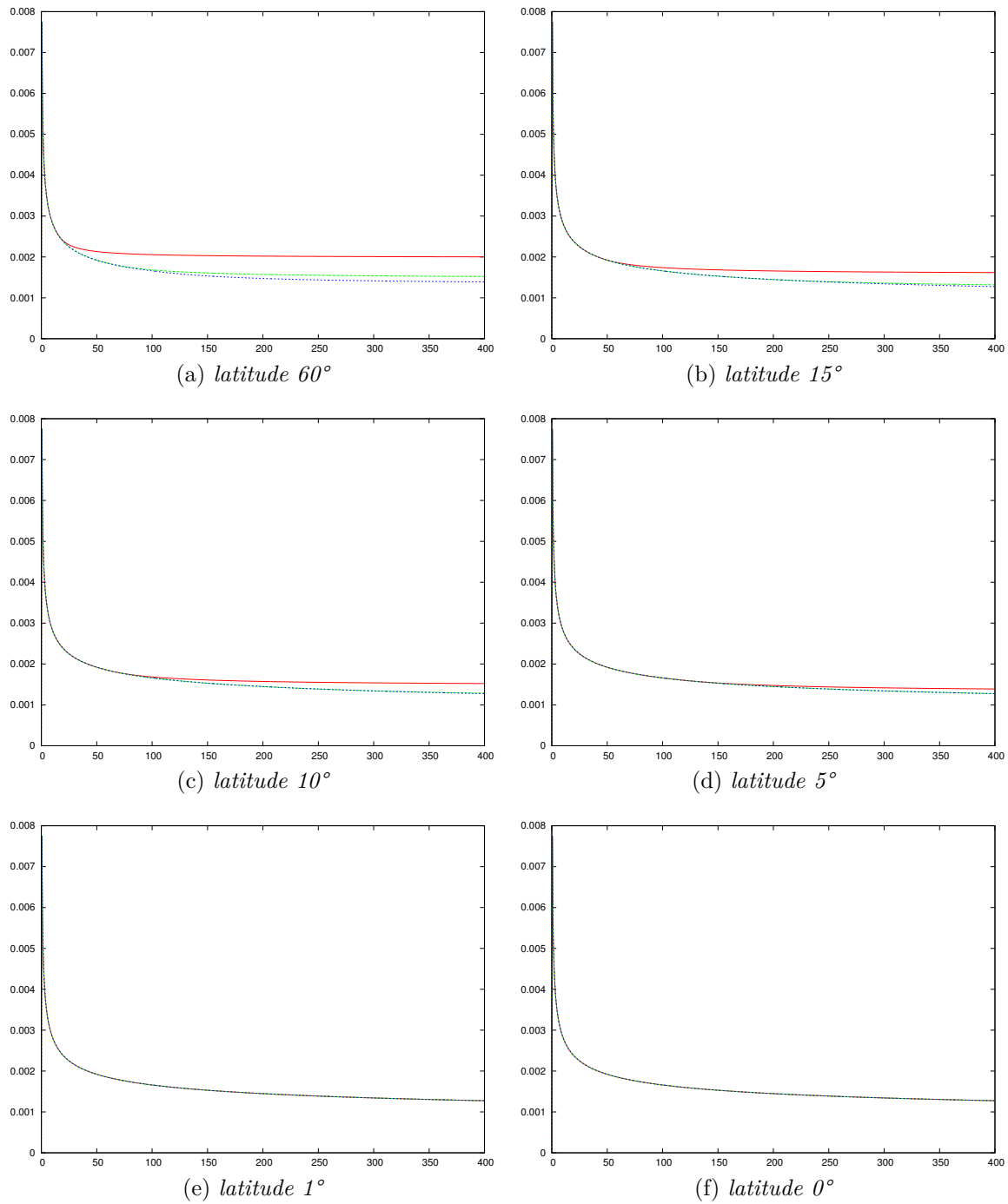


FIGURE 3.5 – Profils de C_D en fonction de la hauteur d'eau (en m) pour $z_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ et \bar{u} valant 10^{-1} m s^{-1} (en rouge), $5 \cdot 10^{-1} \text{ m s}^{-1}$ (en vert) et 1 m s^{-1} (en bleu) dans le cas de la formulation de PEDLOSKY

Étude de la convergence de la méthode de NEWTON Si la méthode de NEWTON a une convergence quadratique, il n'en demeure pas moins que l'on souhaite passer très peu de temps dans le calcul de τ_b , afin de ne pas augmenter de manière trop importante le temps de simulation. Un bon moyen pour ce faire (et par la même occasion s'assurer qu'il n'y aura jamais de boucle infinie) consiste à limiter le nombre d'itérations de la méthode. Il faut alors définir le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision suffisante dans notre cadre.

La convergence de la méthode dépend notamment de la valeur utilisée à l'initialisation. Pour estimer l'ordre de grandeur de H_e , on peut remarquer que le logarithme est une fonction à variance lente et donc le substituer par une constante estimée à l'aide des ordres de grandeurs courants. Dans la littérature, on trouve comme ordre de grandeurs typiques : $H_e \sim 20$ m et $z_0 \sim 2$ mm. Alors $\ln \frac{H_e}{z_0} \sim l = 4 \ln 10 \approx 9,21$ et, d'après l'équation 3.2.16 :

$$H_e \simeq \frac{\kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|}{f_c \cdot (l - 1)}. \quad (3.2.25)$$

Cette approximation a été proposé par Thierry LETELLIER (voir [Letellier, 2004]).

Le tableau 3.3 synthétise les erreurs commises par les versions limitées à 0, 1, 2, 3 ou 5 itérations par rapport à la version où l'on attend la convergence de la méthode, lorsque l'on a recourt à cette valeur d'initialisation.

L'erreur commise en faisant 0 itération correspond à l'erreur commise par l'approximation donnée par l'équation 3.2.25.

Avec ces choix, on constate que deux itérations sont suffisantes pour obtenir une précision tout à fait satisfaisante.

Cas de la formulation de DOWDEN

Dans le cas de la formulation de DOWDEN, la couche de mélange H_c est paramétrisée par l'équation 3.2.21

Cette équation a bien une solution, mais elle ne peut pas être déterminée de manière analytique. Il faut donc procéder à une étude de l'équation en vue de sa résolution de manière approchée. D'après ce qui précède, nous nous plaçons dans le cas où $\|\bar{\mathbf{u}}\| \in \mathbb{R}^+$, $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $H_c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{z_0\}$, $\kappa = 0,4$, $a = 6\,371 \cdot 10^3$ m et $k_N \in]0,10; 0,13[$. D'après l'équation 3.2.21 :

$$H_c^3 \left(\ln \frac{H_c}{z_0} - 1 \right)^2 - \frac{k_N^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2} = 0. \quad (3.2.26)$$

Pour $z' \in \mathbb{R}^+$, posons :

$$q(z') = z'^3 \left(\ln \frac{z'}{z_0} - 1 \right)^2 - \frac{k_N^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2}. \quad (3.2.27)$$

z_0 (m)	$\ \vec{u}\ $ (ms ⁻¹)	f_c (ms ⁻²)	erreur 0 itération (%)	1 it.	2 it.	3 it.	5 it.
$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-1}	$5 \cdot 10^{-5}$	7, 27	$2,55 \cdot 10^{-2}$	$3,23 \cdot 10^{-7}$	0	0
$2 \cdot 10^{-4}$	10^{-1}	$7,292 \cdot 10^{-5}$	28, 52	$2,90 \cdot 10^{-1}$	$3,64 \cdot 10^{-5}$	0	0
10^{-4}	$5 \cdot 10^{-1}$	$1,4584 \cdot 10^{-4}$	46, 52	$6,20 \cdot 10^{-1}$	$1,47 \cdot 10^{-4}$	0	0
$2,5 \cdot 10^{-5}$	10^{-2}	$1,4584 \cdot 10^{-5}$	44, 02	$5,72 \cdot 10^{-1}$	$1,27 \cdot 10^{-4}$	0	0
$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$	35, 21	$4,07 \cdot 10^{-1}$	$6,82 \cdot 10^{-5}$	0	0
$2 \cdot 10^{-3}$	5	$5 \cdot 10^{-5}$	50, 77	$7,04 \cdot 10^{-1}$	$1,84 \cdot 10^{-4}$	$1,27 \cdot 10^{-11}$	0

TABLE 3.3 – Étude de la convergence de la méthode de NEWTON dans le cas de la formulation de PEDLOSKY

Soient :

$$\begin{aligned}\alpha(z') &= \ln \frac{z'}{z_0} - 1, \\ \beta(z') &= \alpha^2(z'), \\ \gamma(z') &= z'^3.\end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}q(z') &= \gamma(z') \beta(z') - \frac{k_N^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2}, \\ \frac{d\alpha}{dz'}(z') &= \frac{1}{z'}, \\ \frac{d\beta}{dz'}(z') &= 2\alpha'(z') \alpha(z'), \\ &= \frac{2}{z'} \left(\ln \frac{z'}{z_0} - 1 \right), \\ \frac{d\gamma}{dz'}(z') &= 3z'^2, \\ \frac{dq}{dz'}(z') &= \frac{d\gamma}{dz'}(z') \beta(z') + \frac{d\beta}{dz'}(z') \gamma(z'),\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dz'}(z') &= 3z'^2 \left(\ln \frac{z'}{z_0} - 1 \right)^2 + 2z'^2 \left(\ln \frac{z'}{z_0} - 1 \right) \\ &= z'^2 \left(\ln \frac{z'}{z_0} - 1 \right) \left(3 \ln \frac{z'}{z_0} - 3 + 2 \right),\end{aligned}\tag{3.2.28}$$

donc :

$$\frac{dq}{dz'}(z') = z'^2 \left(\ln \frac{z'}{z_0} - 1 \right) \left(3 \ln \frac{z'}{z_0} - 1 \right).$$

La fonction exponentielle est une fonction strictement croissante et $z_0 > 0$, donc :

$$\begin{aligned}\ln \frac{z'}{z_0} - 1 > 0 &\implies \ln \frac{z'}{z_0} > 1 \\ &\implies \frac{z'}{z_0} > e \\ &\implies z' > z_0 e, \\ 3 \ln \frac{z'}{z_0} - 1 > 0 &\implies \ln \frac{z'}{z_0} > \frac{1}{3} \\ &\implies \frac{z'}{z_0} > e^{1/3} \\ &\implies z' > z_0 e^{1/3},\end{aligned}$$

ce qui donne le tableau de signe suivant :

z'	0	$z_0 e^{1/3}$	$z_0 e$	$+\infty$
$3 \ln \frac{z'}{z_0} - 1$	-	0	+	+
$\ln \frac{z'}{z_0} - 1$	-	-	0	+
$\frac{dq}{dz'}(z')$	+	0	-	+

$$\begin{aligned}
\lim_{z' \rightarrow 0^+} \ln \frac{z'}{z_0} - 1 &= -\infty \\
\Rightarrow \lim_{z' \rightarrow 0^+} q(z') &= -\frac{k_N^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2}, \\
q(z_0 e^{1/3}) &= z_0^3 e \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 - \frac{k_N^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2} \\
&= \frac{4z_0^3 e}{9} - \frac{k_N^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2}, \\
q(z_0) &= z_0^3 - \frac{k_N^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2}, \\
q(z_0 e) &= z_0^3 e^3 (\ln e - 1)^2 - \frac{k_N^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2} \\
&= -\frac{k_N^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2}, \\
\lim_{z' \rightarrow +\infty} \ln \frac{z'}{z_0} - 1 &= +\infty \\
\Rightarrow \lim_{z' \rightarrow +\infty} q(z') &= +\infty,
\end{aligned}$$

ce qui donne le tableau de variation suivant :

z'	0	$z_0 e^{1/3}$	z_0	$z_0 e$	$+\infty$
$\frac{dq}{dz'}(z')$	+	0	-	0	+
$q(z')$	$-\frac{k_N^2 \kappa^2 \ \bar{\mathbf{u}}\ ^2 a}{16\Omega^2}$	$\frac{4z_0^3 e}{9} - \frac{k_N^2 \kappa^2 \ \bar{\mathbf{u}}\ ^2 a}{16\Omega^2}$	$z_0^3 - \frac{k_N^2 \kappa^2 \ \bar{\mathbf{u}}\ ^2 a}{16\Omega^2}$	$-\frac{k_N^2 \kappa^2 \ \bar{\mathbf{u}}\ ^2 a}{16\Omega^2}$	$+\infty$

On cherche $H_c > z_0$. De plus, $a > 0$ et, avec les ordres de grandeurs typiques des océans, $z_0^3 < \frac{k_N^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2}$, donc $z_0^3 - \frac{k_N^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2} < 0$ et $-\frac{k_N^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2} < 0$, donc q s'annule une fois et une seule sur $]z_0 e; +\infty[$ et la méthode de NEWTON permet de calculer H_c .

Dans un premier temps, il faut évaluer l'erreur induite par l'approximation $H_c \gg z_0$. Le tableau 3.4 résume les résultats obtenus. Ces résultats montrent que l'approximation est totalement légitime.

z_0 (m)	$\ \bar{\mathbf{u}}\ $ (m s ⁻¹)	H_c (m)	erreur sur H_c (%)
$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-1}	219,99	$5,38 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^{-4}$	10^{-1}	194,24	$5,10 \cdot 10^{-6}$
10^{-4}	$5 \cdot 10^{-1}$	523,01	$8,42 \cdot 10^{-7}$
$2,5 \cdot 10^{-5}$	10^{-2}	40,75	$2,93 \cdot 10^{-6}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-2}$	125,25	$8,18 \cdot 10^{-6}$
$2 \cdot 10^{-3}$	5	2597,08	$3,74 \cdot 10^{-6}$

TABLE 3.4 – Erreur maximale commise sur H_c par l'approximation (précision : 10^{-10}), pour une profondeur comprise entre 0 m et 4000 m dans le cas de la formulation de DOWDEN avec $k_N = 0, 10$

La figure 3.6 montre des profils de C_D obtenus avec cette paramétrisation.

Étude de la convergence de la méthode de NEWTON Comme précédemment, l'objectif est de limiter le temps passé à calculer τ_b . À l'aide des grandeurs typiques de la littérature, on peut donner une valeur pour initialiser la méthode de NEWTON :

$$H_c \simeq \sqrt[3]{\frac{k_N^2 \kappa^2 \|\bar{\mathbf{u}}\|^2 a}{16\Omega^2 (l-1)^2}} \quad (3.2.29)$$

Le tableau 3.5 synthétise les erreurs commises par les versions limitées à 0, 1, 2, 3 ou 5 itérations par rapport à la version où l'on attend la convergence de la méthode, lorsque l'on a recourt à cette valeur d'initialisation.

z_0 (m)	$\ \bar{\mathbf{u}}\ $ (m s ⁻¹)	erreur 0 it. (%)	1 it.	2 it.	3 it.	5 it.
$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-1}	18,63	2,03	$8,08 \cdot 10^{-2}$	$5,15 \cdot 10^{-3}$	$2,03 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^{-4}$	10^{-1}	34,36	7,21	$1,61 \cdot 10^{-1}$	$8,10 \cdot 10^{-3}$	$2,20 \cdot 10^{-5}$
10^{-4}	$5 \cdot 10^{-1}$	45,91	12,14	$8,52 \cdot 10^{-1}$	$3,12 \cdot 10^{-2}$	$6,68 \cdot 10^{-5}$
$2,5 \cdot 10^{-5}$	10^{-2}	37,96	8,67	$3,24 \cdot 10^{-1}$	$1,50 \cdot 10^{-2}$	$3,79 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-2}$	31,26	6,03	$5,72 \cdot 10^{-2}$	$3,05 \cdot 10^{-3}$	$8,90 \cdot 10^{-6}$
$2 \cdot 10^{-3}$	5	36,38	8,02	$2,47 \cdot 10^{-1}$	$1,19 \cdot 10^{-2}$	$3,10 \cdot 10^{-5}$

TABLE 3.5 – Étude de la convergence de la méthode de NEWTON

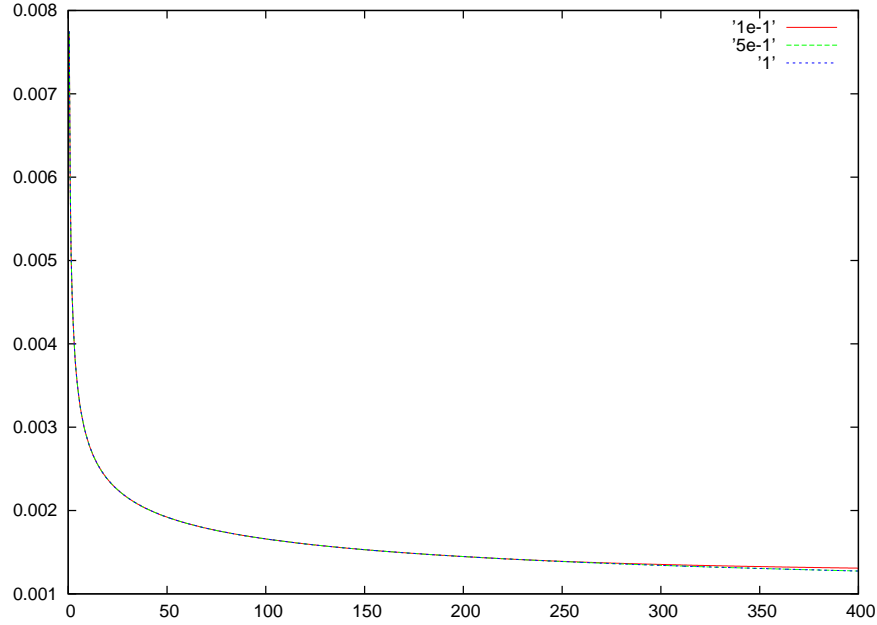


FIGURE 3.6 – Profils de C_D en fonction de la profondeur (en m), pour $z_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ m et $\|\bar{\mathbf{u}}\|$ valant 10^{-1} m s^{-1} , $5 \cdot 10^{-1} \text{ m s}^{-1}$ et 1 m s^{-1} dans le cas de la formulation de DOWDEN avec $k_N = 0, 10$

L'erreur commise en faisant 0 itération correspond à l'erreur commise par l'approximation (3.2.29).

Avec ces choix, on constate que deux itérations sont suffisantes pour obtenir une précision tout à fait satisfaisante.

3.3 Conclusion partielle

En mettant en œuvre la méthodologie présentée dans la partie I, nous avons pu modéliser la marée dans l'estuaire de l'Amazone. La comparaison avec les observations montre que cette modélisation est plus proche des mesures effectuées que les autres déjà publiées, telle par exemple celle de [Gabioux *et al.*, 2005]. De plus, l'étude a montré la forte influence du frottement de fond sur la marée dans la région, ainsi que l'importance de sa variabilité géographique. À l'aide d'une bathymétrie et d'un trait de côte raffiné (chapitre 4), il nous deviendra possible de créer un atlas de marée précis, qui, pour des raisons techniques, n'est pas inclus dans le présent document, mais fera l'objet d'une publication prochaine.

Chapitre 4

Le trait de côte et la bathymétrie dans l'estuaire de l'Amazone

Le chapitre 3 a mis en évidence l'importance d'avoir une bathymétrie et un trait de côte précis. Cependant, les bases de données disponibles pour la plus grande partie du globe terrestre, notamment au niveau de l'estuaire de l'Amazone, manquent de détail. En conséquence, une part importante du travail effectué au cours de cette thèse a consisté à créer un trait de côte et une bathymétrie les plus réalistes possibles.

À l'exception des côtes des États-Unis, peu d'efforts ont été réalisés pour fournir de manière systématique des bases de données bathymétriques et de traits de côtes pouvant servir dans le cadre d'une modélisation océanographique à haute résolution. En conséquence, la tâche de construction de telles bases de données échoie aux groupes se chargeant sur la modélisation. Dans ce chapitre, nous décrivons la méthodologie que nous avons appliquée pour établir un trait de côte et une bathymétrie précise de l'estuaire de l'Amazone.

Pour ce faire, comme nous l'avons déjà évoqué dans le chapitre 3, nous nous sommes basés sur la bathymétrie Gebco (voir [Monahan, 2008]). Nous l'avons enrichi avec des cartes marines de la région et les données collectées pendant les campagnes Amandes (voir chapitre 2). Ces données, fortement bruitées, ont nécessité un traitement particulier. Ceci nous a aussi permis d'étendre notre maillage jusqu'à Óbidos, limite où l'influence de la marée se fait sentir et où les données sur le débit du fleuve sont plus faciles à collecter. Également, nous avons eu recours à l'imagerie satellite pour valider le trait de côte. De plus, nous avons enrichi la base de données des constituants de la marée dans la région. La bathymétrie et le trait de côte résultants ont alors été validés par l'intermédiaire d'une simulation de marée se basant sur une version à jour du modèle présenté dans le chapitre 3.

Tous ces efforts nous ont permis tant d'améliorer la modélisation que la validation des solutions. Ils font l'objet d'un article, reproduit ici.

Une fois de plus, nous n'avons pas pu intégrer dans cet article certains détails, présentés en complément à la fin de ce chapitre.

Sommaire

4.1	Base de données géographiques pour l'Amazone	108
4.2	Ondes de marée	127
4.2.1	Onde M_2	127
4.2.2	Onde K_1	127
4.2.3	Onde S_2	127
4.2.4	Onde M_4	127
4.2.5	Tableau statistique	132
4.3	D'une carte papier à un trait de côte numérique	132
4.3.1	Digitalisation	132
4.3.2	Vectorisation	133
4.3.3	Retour aux coordonnées sphériques	133
4.3.4	Coordonnées barycentriques	133
4.4	Conclusion partielle	134

4.1 Construction d'une base de données géographiques et géophysiques pour la modélisation de l'estuaire de l'Amazone

Cette section reproduit l'article [Lyard et Le Bars, 2010].

Geographical and geophysical database construction for the Amazon estuary modelling

F. Lyard, Y. Le Bars
CNRS-LEGOS

Observatoire Midi-Pyrénées – 14, Avenue E. Belin – 31400 Toulouse – France
Florent.Lyard@legos.obs-mip.fr

Abstract

The precise description of the coastal shorelines and bathymetry is a pre-requisite for the realistic numerical modeling of the ocean and estuarine dynamics. Except for the US off-shore seas, very little has been done yet to openly and systematically provide digital database that can be suitable for very high resolution modeling. Consequently, the burden of constructing such database is usually left to the modeling groups. This manuscript is devoted to the efforts made by the French-Brazilian Amandes project group to produce a shoreline and bathymetry database suitable to deploy a precise unstructured mesh model. In addition to these geographical databases, a new tidal constants database has been derived from the Topex-Poseidon and Jason-1 GDRs. Validation of the new geographical databases has been made through the simulations of tides using T-UGOm in an upgraded finite element mesh.

Introduction

Our long-going objectives are to simulate the continent to ocean transfers through the Amazon River system. The first of them is to study the nature, transformation and dispersion of fluxes of trace elements and isotopes weathered from Andes Mountains and transported by the River Amazon and estuary into the ocean. The second objective is to improve the coupled dynamical modeling of the shelf/slope/open ocean system of the Amazon mouth. This serves to better quantify the transport of freshwater and its impact on the regional circulation. It also serves to study the tidal effect on transport and re-suspension/redistribution of sediments, and the impact of all these factors on the transformation and dispersion of chemical elements. The third objective is to quantify the impact of these integrated fluxes on the chemical composition of the water masses flowing along the Amazon margin. These fluxes are constrained simultaneously by the tidal forcing, the North Brazil Current and wind stress.

Our modeling approach consists in modeling the whole system in a unique model, using the natural capabilities of the unstructured meshes to deal with the full range of spatial scales involved in a river-estuary-shelf sea domain. However, the Amazon River, estuary and shelf system is one of the most challenging areas for numerical modeling. The dimensions of the Amazon's hydrodynamic system are huge compared the usual coastal systems, due to the presence of a significantly wide continental shelf, the large extent of the estuary (also connected

with the Pará River estuary) and the far-going tidal upstream propagation (up to Óbidos, 800 km away from the river mouth). In addition to its unusual dimensions, the Amazon system is extremely complex and poorly documented. Both shorelines and bathymetry are not well known in many places, and are poorly depicted in the standard, digital databases such as GSHHS, version 1.6 (shorelines and rivers database available from NOAA at <http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/shorelines/gshhs.html>, Wessel and Smith, 1996) or GEBCO 1 arc-minute bathymetry (available at https://www.bodc.ac.uk/data/online_delivery/gebco). It has been clear from the beginning of the Amandes project that a long, tedious step would consist in creating adequate geographical digital databases to feed the model implementation tools. Most of the work presented here has been made possible by the use of the Genesis/Xscan graphical data editor developed at LEGOS (see <http://sirocco.obs-mip.fr>). During the project time, new geographical databases were released (GSHHS, version 2.0, GEBCO-08) showing some significant improvements. Nevertheless, the accuracy and overall reliability still do not fit the minimum requirements for proper numerical modeling.

In the following, we describe the reconstruction of a high accuracy shoreline and bathymetry database, and we will present the new Amandes numerical model mesh based on those 2 databases. The validation of this new implementation is performed through the simulations of tides in presence of the Amazon River flow and the comparisons with the most recent tide gauge constants collection (FEMAR) and an up-to-date analysis of Topex-Poseidon and Jason 1 sea level measurements.

Shorelines digitalization

The main shorelines issues is located in the estuary, where the river flow is divided in numerous main channels interconnected through secondary channels. Not only the channel network is extremely complex, but it is permanently modified by the annual cycle of floods and low waters, and also, at longer time scales, by the significant erosion and sediment deposits that modify the river and islands shape. So in addition to the typical errors found in nautical charts (local misplacements for pre-GPS data, overall geographical reference shift, river width exaggeration, etc), errors that are probably increased by the terrain configuration, not well suited for topographical surveys, the reported details may have changed in between the chart production epoch and present times.

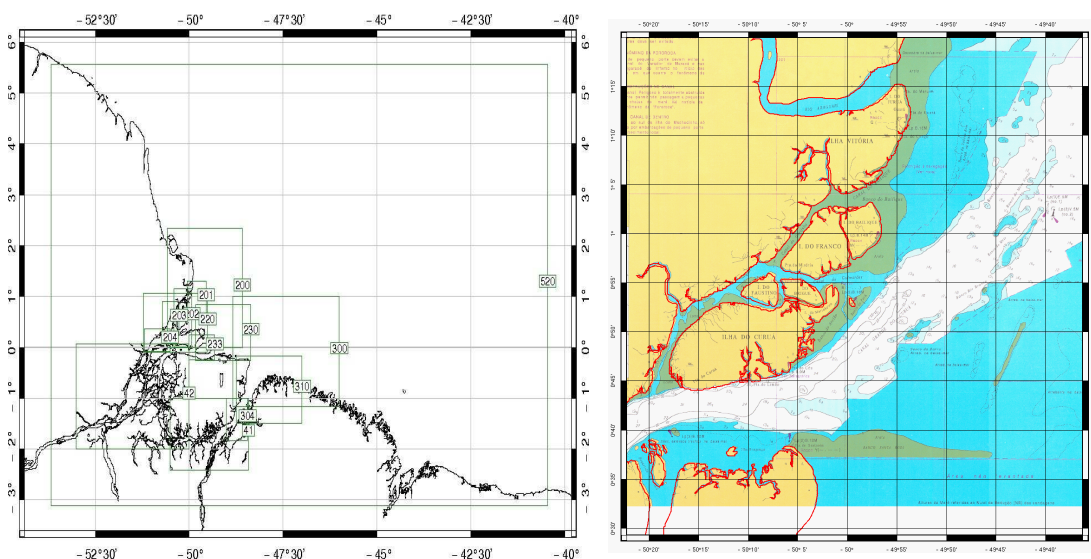


Figure 1: geographical extents of the nautical charts digitized for the shoreline database (left panel). Typical post-processing verification of the digitized shorelines (in red)

In a first step, a selection of Brazilian nautical charts (see Table 1) have been digitized and scanned, then merged to produce a new set of shorelines (Amazon Shorelines Digital Database version I, ASDB-I). In places where the charts show some overlapping, the most detailed source has been privileged. The editing process, i.e. selection and merging, has needed tremendous efforts to insure a satisfying quality. The so-obtained database has been checked against the original data (nautical charts) and validated (see Figure 1).

	Credits	First edition	Last correction
41		11/06/1965	1986
42		20/01/1956	1986
200	DHN – Marino do Brasil	12/02/1975	2002
201	DHN – Marino do Brasil	12/11/1956	2006
203	DHN – Marino do Brasil	03/11/1954	2002
204	DHN – Marino do Brasil	31/12/1954	2002
220	DHN – Marino do Brasil	10/04/1958	2002
230		10/02/1975	1997
233		20/05/1975	1997
300	DHN – Marino do Brasil	18/12/1970	2001
304	DHN – Marino do Brasil	03/05/1968	2006
310	DHN – Marino do Brasil	31/12/2000	----
520		25/05/1984	1992

Table 1: Brazilian nautical charts digitized for ASDB-I database construction

In a second step, the airborne or satellite imagery has been used to control the accuracy of the digital database. The initial motivation to apply a quality procedure has been our limited confidence in the nautical charts in describing the connection between the Amazon River and the Para River and the necessity to clearly identify the main features out of the complex channel system to limit the model mesh details to the essential ones. For its simplicity in use, it has been

chosen to extract the satellite images from the Google Earth interface (available from <http://earth.google.fr/>). Google Earth images (GEIs) are a 3D representation of a LON/LAT WGS84 datum database. By choosing a earth-tangent projection centered on the regions of interest in the Genesis/Xscan GUI (that handles shorelines, bathymetry, structured or non-structured mesh and other parameters needed to build up a hydrodynamic model), the GEIs can be easily geo-referenced and superposed to the digital database. The images have been collected in 45'x30' boxes at a 1900x1200 pixel resolution, allowing for a good compromise between the true image resolution (about 50 meters) and editing commodity.

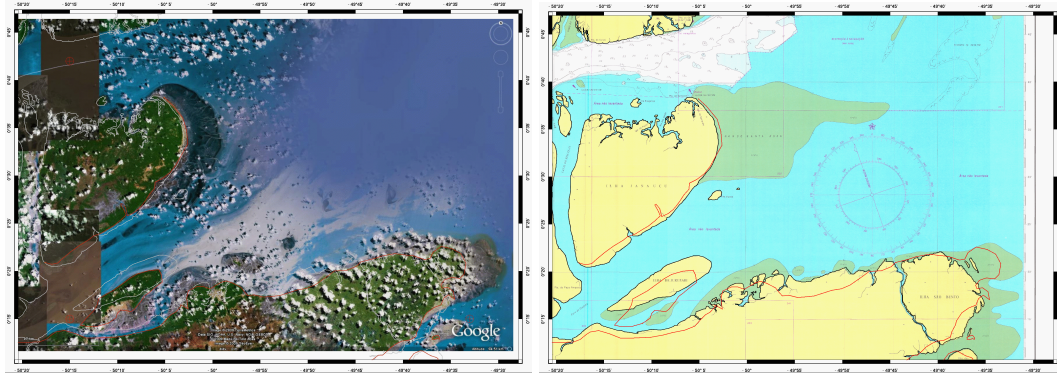


Figure 2: ASDB-I shorelines in gray and GEI space imagery digitized shorelines in red (left) and comparison with nautical charts (right)

However, we have identified many inaccuracies in the ASDB-I not only in the Amazon/Para connection system but also in the main river channels and estuary. As shown on Figure 2, the misfit between GEIs and nautical charts can be significant at the level of details accounted for in the numerical model. The differences might be explained by the continuous sedimentation and erosion processes at work in this region. The mangrove development can durably dry some inter-tidal regions (as it seems to be the case on the South-East point), and its destruction will permit erosion to be at work again. Of course, the space imagery products can induce erroneous conclusions: the fake blue colouring of the river water (actually light brown) might give the wrong impression of permanently wet channels; the height of the tides at the imaging epoch will shows more or less dried portions of inter-tidal regions. However, the space imagery brings us a very powerful way of inferring the true channel conditions. For instance, the channel displayed on the left side of Figure 2 is marked as non-drying in the nautical charts (blue colour), but is clearly drying from the space image.

Consequently we have extended the quality check to the whole ASDB-I in the Amazon River and estuary region, and it had become clear that for further developments it is necessary to re-digitized some significant portions of the ISDB-I. It is an on-going work (ASDB-II) that will be presented in further publications.

Bathymetry

As already mentioned in Le Bars et al (2010), the standard bathymetry databases (BDBs) are of poor accuracy on the Amazon Shelf and estuary. River depths are even less documented. The GEBCO 1 minute and Smith&Sandwell, version 8 (Smith and sandwell, 1997), BDBs are shown Figure 5. The GEBCO BDB is rather regular and smooth, unfortunately the very shallow regions such as the river mouth are much too shallow. The Smith&Sandwell's BDB shows more details, most of them being totally artificial on the shelf. In parallel to the shoreline reconstruction, isobaths, including drying limits and sounding points have been digitalized as well from the

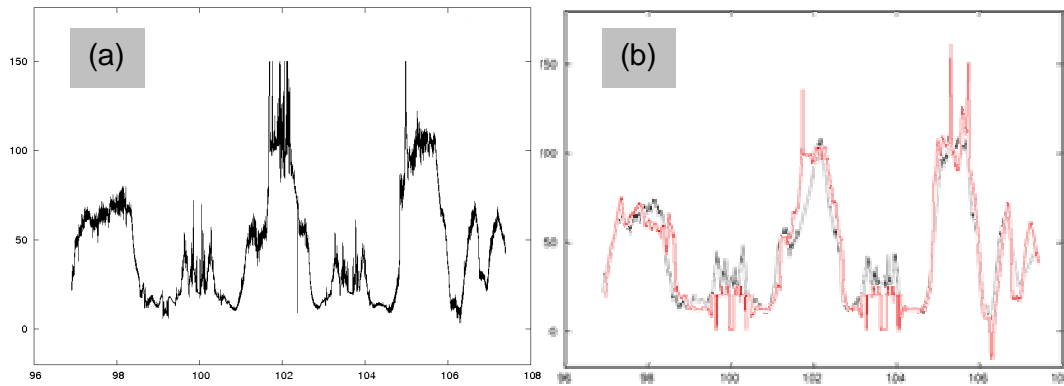


Figure 3 : Antea's campaign sonar records: raw records (a) and filtered records (b, black line) used in the bathymetry dataset. Red line is an interpolation of GEBCO data along the vessel track. Horizontal axis is time (days), vertical axis are positive depths in meters.

Brazilian nautical charts. The AMANDES vessel (ANTEA, IRD) echo sounder records have been also processed. A so-called Loess filter is used to eliminate unphysical, high frequency noise in the data:

$$\hat{h}(n) = \sum_{i=1}^N w_{n,i} h(i) \times \left(\sum_{i=1}^N w_{n,i} \right)^{-1} \text{ where } x_{n,i} = \left(\frac{d_{n,i}}{l_c} \right)^2 \quad \begin{matrix} w_{n,i} = (1 - x_{n,i}^3)^3 & x_{n,i} < 1 \\ w_{n,i} = 0 & x_{n,i} \geq 1 \end{matrix}$$

Preliminary to the sonar records filtering, a first editing has been applied to eliminate data with unphysical point-to-point rate of change (in other words, very sudden changes in measured depths are considered as an instrument malfunctioning proxy). The filter half-width l_c has been set to 100 meters. Figure 3 is an illustration of the sonar's data editing, from a typical sample. The GEBCO interpolation (red line on right panel) along the ship's track clearly demonstrates the database inaccuracy, especially in the very shallow waters.

Special attention has been paid to change the hydrographic level (to which depth are referred on the nautical charts) into a mean sea level by adding a tidal low tide correction (based on local tide gauge constants). Shorelines, or sampled drying limits when indicated on the nautical charts, were corrected by the mean of the interpolation from a global low water level 1 arc-minute map (corresponding to a mean syzygy tide, Lyard, personal communication, 2008). Campaigns measurements have been corrected from a tidal prediction using our preliminary tidal simulations. The GEBCO 1 arc-minute depths used at ocean boundary of the depth's mesh

were assumed to be given in mean sea level reference. Whatever the attention paid to this step, the results is obviously approximated, as the tidal reference's harbor for the Brazilian nautical charts were not known but inferred from of actually available tidal observations. However, the authors have considered that it is preferable to apply an approximate correction than no correction at all, especially in the very shallow region at the mouth of the estuary.

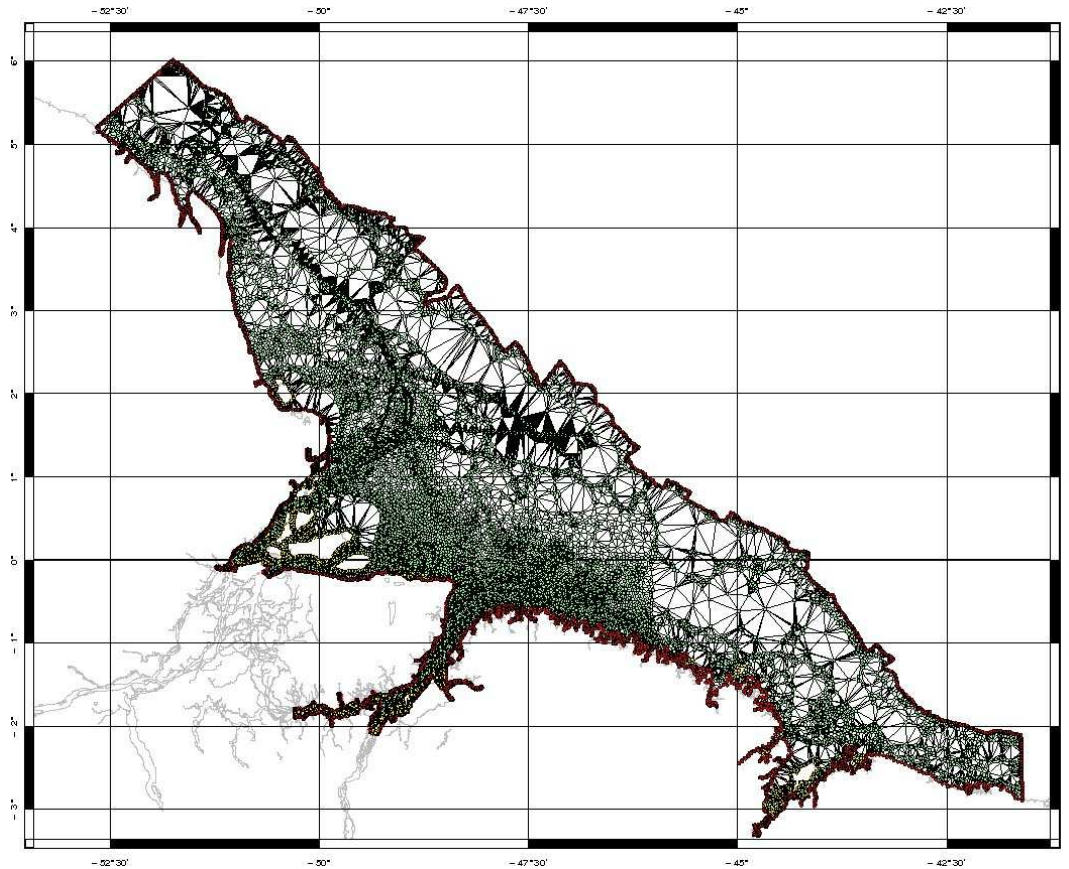
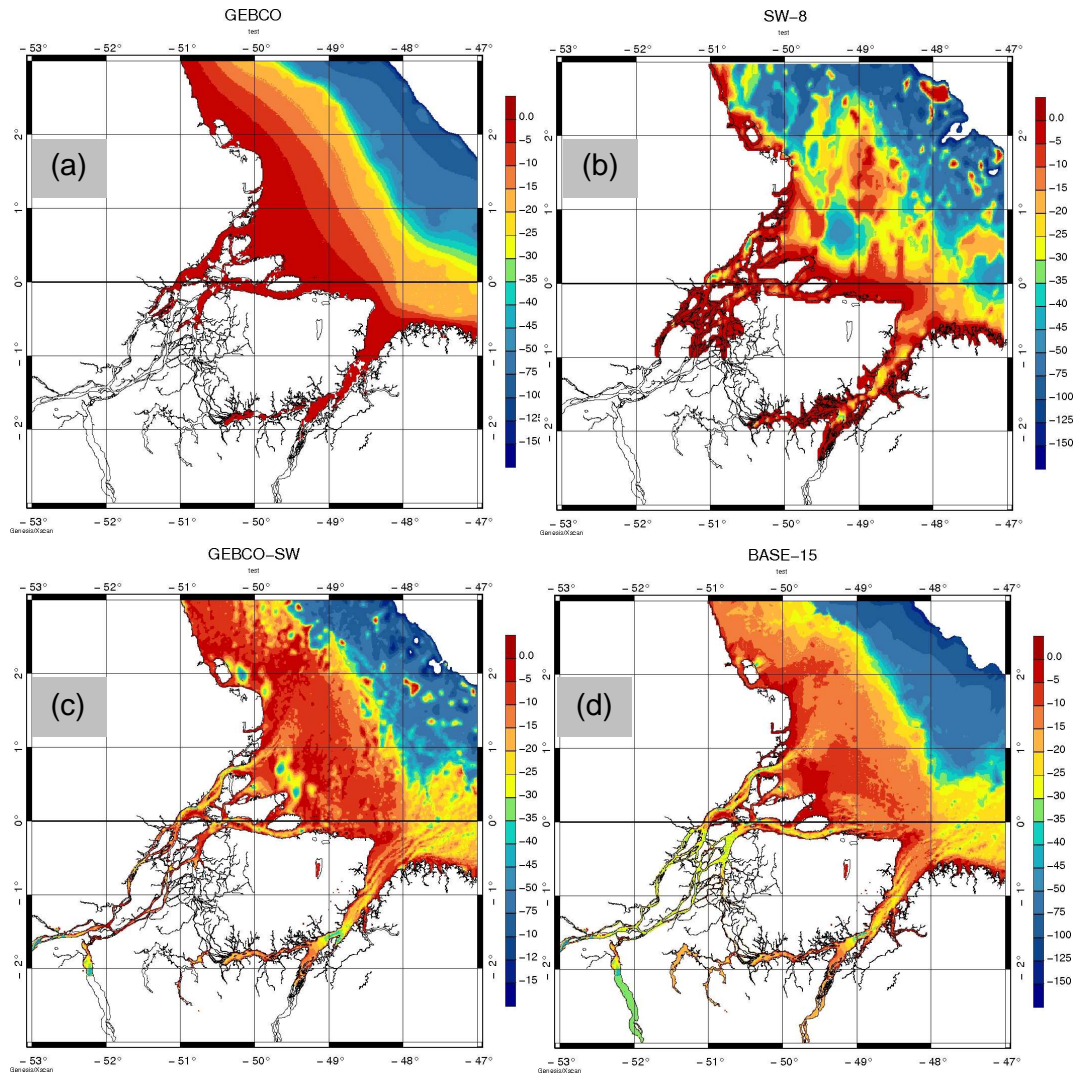


Figure 4 : depth mesh. Depth data high densities are mostly located in the rivers and estuary off-shore region. Antea cruise contribution (in the North-West shelf and Amazon Estuary) can easily be identified among the other data (nautical chart digitalization).

The various depth data (digitized isobaths, sounding points and Antea echo sounder measurements) were gathered into a node set where limits have been digitized from the shorelines (at the solid limits) and GEBCO 1 arc-minute 500m isobaths (at the ocean limits, in order to minimize jumps when combining the new estuary and shelf bathymetry into a regional, larger extent dataset) to be finally assembled into a finite element mesh using the triangle software (Shewchuk, 1996), as shown in Figure 4. The irregularities at the open ocean limits are due to the use of different GEBCO isobaths to define the mesh extent, namely where the 500m isobaths was inconsistent with actual depth measures. The AMANDES sea campaigns have sampled some large portion of the shelf break, and the vessel measurements were found to be more or less consistent with the GEBCO isobaths positions. The erroneous location of shelf

breaks is a permanent source of problems in numerical modeling, especially when comparing numerical simulations with in situ data. This is our case (bottom ADCPs were deployed along the shelf break to measure the internal tides currents, not discussed here), in consequence the choice was made to keep the AMANDES depth measurements and adapt the ocean limits to deeper isobaths if necessary. A regularly gridded depth dataset has been linearly interpolated from this mesh with a resolution of 30'' and combined with a re-interpolated GEBCO. It has been then re-interpolated on a 6'' grid in order to assign arbitrary depths in the Amazon River



bed and connected channels.

Figure 5 :bathymetry dataset in the Amazon River estuary. GEBCO(a), Smith&Sandwell (b), GEBCO-08 (c) and AB2 (d)

The motivation for rebuilding a bathymetry dataset is clearly explained by the first two panels in Figure 5. The GEBCO 1 arc-minute dataset is nicely smooth, too smooth and estuary and shelf details are simply not present. The Smith and Sandwell dataset is dominated by erratic, unrealistic structures. During the Amandes project, GEBCO has released a new global

bathymetry dataset, the GEBCO_08, a global bathymetric grid with 30 arc-second spacing, displayed in the third panel. It is a continuous terrain model for ocean and land, with land data largely derived from the Shuttle Radar Topography Mission (SRTM30) data set. The grid has been generated by combining quality-controlled ship depth soundings with interpolation between sounding points guided by satellite-derived gravity data (see http://www.gebco.net/about_us/news_and_events/gebco_08_release.html). This new dataset clearly is an improvement of the two earlier distributions, especially in the Amazon River and Para River estuaries. In these areas, it compares very well with the AB-II dataset. However, the depths indicated in the off-shore regions seems to be still too shallow and noisy. Idem, the depths given for the upper Amazon River bed also are too shallow. In conclusion, despite AB-II clearly can be improved again, especially in the inland portions of the Amazon River, it is clearly the most convenient bathymetry database available for numerical modeling in this region. Similarly to the shoreline database, the effort of improving the AB series continues, thanks to the collaboration between French and Brazilian hydrology groups (ORE Hybam, <http://www.ore-hybam.org>) and the support of the French national space agency (CNES) in the SWOT program framework. Further work is also needed over the continental shelf, and especially at the shelf break. The regularly gridded bathymetry resolution has already inflated the regional database file size to an uncomfortable level despite it is barely sufficient for representing the channels' depths. A unstructured grid format is being evaluated for common use and distribution, which would adapt extremely easily to any further refinements and corrections.

Altimetry tidal analysis

In this work, the altimetry dataset has been restricted to T/P and Jason series continuous mission data, the main reasons of this choice being the higher length of the sea level time series and the overall excellent and quite homogeneous quality of the data. The AVISO GDRs have been post-processed with the X-Track tool to guarantee the highest level of data quality and abundance, especially in the on-shore vicinity (Roblou et al., 2010).

JASON	Aliased period	S2	N2	K2	K1	O1	P1	2N2	MU2	NU2	L2	T2	M4	MS4	S1	Q1	OO1	J1	N4	M6
		59	50	87	173	46	89	23	20	65	21	51	31	1084	117	69	30	33	25	21
M2	62	1084	245	220	97	173	206	35	30	1303	31	273	62	66	132	594	58	69	41	31
S2	59	\	316	183	89	206	173	37	31	592	32	365	66	62	117	384	61	74	43	32
N2	50	\	\	116	69	594	112	41	34	206	35	2331	83	52	86	173	76	97	50	36
K2	87	\	\	\	173	97	3354	30	27	264	27	122	48	94	329	349	46	53	35	27
K1	173	\	\	\	\	62	183	26	23	105	23	71	38	206	365	116	36	40	29	24
O1	46	\	\	\	\	\	94	44	37	153	38	473	97	48	75	134	87	116	54	38
P1	89	\	\	\	\	\	\	30	26	245	27	117	48	97	365	316	45	52	34	27
2N2	23	\	\	\	\	\	\	\	206	34	245	41	82	23	28	33	91	72	251	254
MU2	20	\	\	\	\	\	\	\	\	30	1303	34	59	21	25	29	63	53	113	1084
NU2	65	\	\	\	\	\	\	\	\	\	30	226	59	69	147	1090	55	66	40	30
L2	21	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	35	62	21	25	29	67	56	124	6449
T2	51	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	80	53	89	187	73	93	48	35
M4	31	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	32	42	56	819	594	122	62
MS4	1084	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	132	74	31	34	25	21
S1	117	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	169	40	45	31	25
Q1	69	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	53	62	39	30
OO1	30	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	344	144	67
J1	33	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	\	101	56

other signals are mixed at the apparent frequency (the true ocean signal at this frequency, plus all others high frequencies having a similar aliased frequency as the one of the tidal constituent). For those both issues, the continuous increase of the mission duration will progressively lower the level of error. Secondly, the rate of actually available data in the altimetry dataset compared to the nominal number of observational cycles can decrease rapidly in the vicinity of the dry lands. Among the smaller number of data still getting through the data processing, and despite severe editing procedures, the data quality is most probably degraded compared to open ocean data. For continuous missions such as TP and Jason series, the first point has today a limited impact on the data quality for most tidal constituents, except in some regions with high meso-scale ocean dynamics such as the western boundary currents and the circum polar current. The examination of the differences at the cross-overs between the ascending and descending track harmonic analysis shows that the contamination effects are extremely consistent and smooth along tracks when associated with meso-scale dynamics (narrow slope or boundary currents can trigger less smooth effects, as discussed below). The difference in the satellite sampling time between ascending and descending track will keep the level of contaminating energy unchanged, but change the apparent phase of the non-tidal ocean contamination. So the norm of the vector difference of the analyzed tidal constituents at the cross-overs can be seen as an indicator of the contamination amplitude.

The second point triggers much more heterogeneous errors in the coastal zone. The tidal elevation (amplitude and phase) smoothness properties can be used to assess errors due to data loss and/or of lower quality (typically the coastal zone). When screening the along-track constants, spurious oscillations are the indicator of a deficiency in the analysis step due to data loss. An iterative process is used to detect out-layers, and their distance compared to a smooth interpolation or extrapolation of the valid along-track constants is taken as a measure of the error (smoothing is performed by using a Loess filter where the window width is a function of the square root of the depths in order to respect the change of barotropic wavelength with bathymetry). The same algorithm is used to detect short-wavelength, spurious oscillations in the amplitude or phase lag that can be due to a truly physical signal such as the surface signature of internal tides (Carrère et al., 2004; Ray and Mitchum, 1996) or local circulation variability at the tidal aliased frequency, or residual noise in the altimeter geophysical data records (GDRs). In the case where the targeted physical variable is the barotropic tides (it is the case in this paper), the short wavelength oscillations are to be considered as a data contamination and the corresponding error level is quantified again by the distance between a smoothed interpolation and raw (complex) data.

About 500 cycles are available for the Topex-Poseidon and Jason-1 GDRs. Given this theoretical time series, the analyzed tidal spectrum is defined to be as complete as possible. However a procedure of admittance constraints (Munk and Cartwright, 1966) and decimation is needed to adapt the analyzed spectrum to possibly local lower of rate of acquisition. The

spectrum determination procedures are described in a forthcoming publication (Roblou and Lyard, 2010).

The total error level for the M_2 harmonic constants is shown on Figure 6-a. The smooth structures are driven by the “alias” error estimated at the cross-over. The narrow patches are driven by the short wavelength anomaly estimates. The average error level is less than 2 centimetres. Some deep ocean and shelf break areas shows higher error levels, possibly due to the presence of significant ocean circulation (such as the North Brazilian current) or more likely the surface signature of internal tides. Much higher error levels are found at the coastal extremity of the ascending tracks (i.e. tracks with SW to NE directions). This is typically due to the loss of data consecutive to the saturation of the altimeter during the continent overflight. Descending tracks (i.e. tracks with NW to SE directions) are marginally affected at their coastal end. Confirmation can be found by examining the data acquisition rate indicated on Figure 6-b. This figure also discloses two local anomalies (indicated by the dotted circles) where the data acquisition rate is 10% to 25% lower than usual (considering that the shorelines is far enough to exclude land effects). Looking closer to the data shows that the rate of acquisition drops at spring tides and get back to normal at neap tides (Le Bars, 2010). The depths for these two regions are extremely shallow (10 metres or less). So the data loss is possibly due to the local drying during spring tides low waters. It could also be possibly due to not a total drying, but a partial one that will leave fluid mud reaching the surface. Fluid mud might be able to strongly dissipate the ocean surface waves, creating the condition for a specular radar echo not workable by the on-board altimeter tracker, hence a loss of data. Additional investigations will be needed to clearly identify the causes for these remarkable anomalies, of which no other examples are presently known by the authors.

Verification using tidal simulation

A new triangular unstructured grid has been constructed from the improved shorelines and bathymetry dataset (Figure 7). The extent is similar to the first triangular grid used in Le Bars et al. (2010). However, to be consistent with the scientific framework supporting the modeling efforts, the mesh has been extended along the Amazon River up to the city of Óbidos, usually considered as the limit where tidal effects can be observed. Also, two main connecting channels (between the Amazon and Pará River) have been identified and discretised in the new unstructured mesh. Resolution is mostly driven by the coastal geometry and the bathymetry gradients, not only at the shelf break, but also on the shelf itself. T-UGOm numerical model, release 2.2, has been implemented on the new grid.

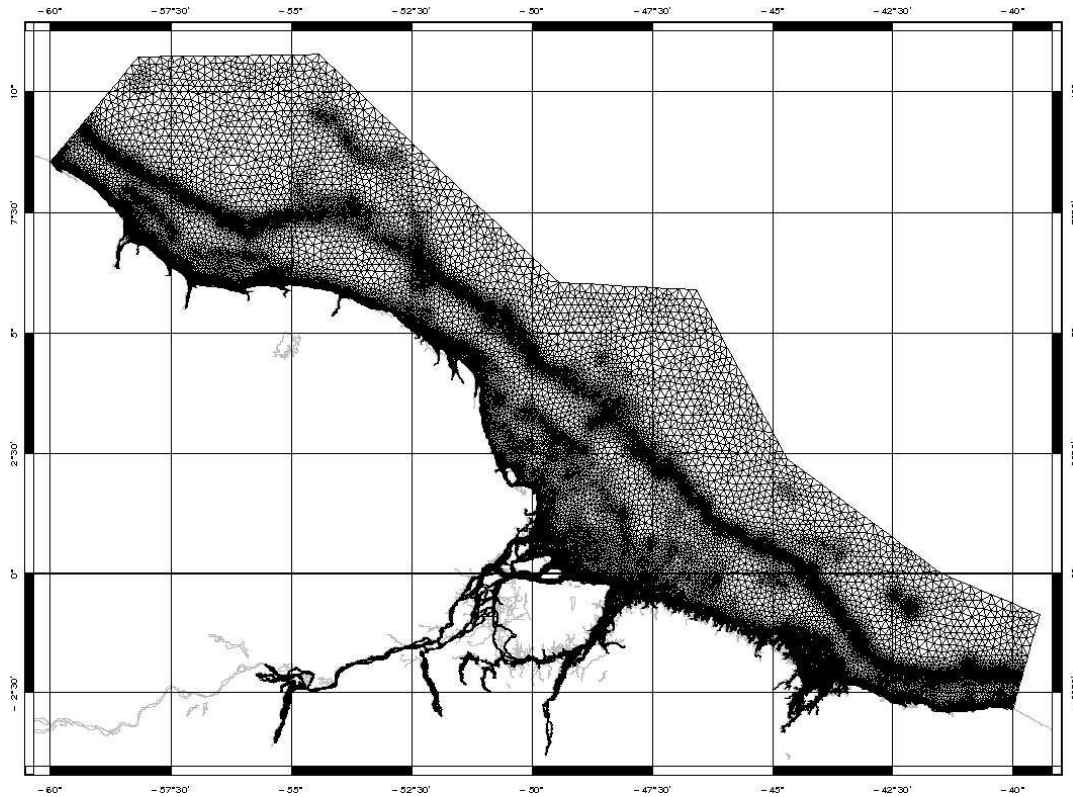


Figure 7 : Amazon system model grid, version 2. The mesh resolution ranges from 500m up to 10 km. Resolution is mostly driven by the coastal geometry and the bathymetry gradients.

Tidal simulations have been performed on the new T-UGOm implementation, with the objectives first to validate the improved bathymetry and shorelines, and second to produce a complete tidal atlas for this region. As mentioned in the shorelines reconstruction section, this improved implementation is doomed to be replaced in the future after the full treatment of satellite images and the construction of a more durable shoreline database. In consequence, we choose to limit the tidal simulation presentation to the validation of the M_2 tide. As highlighted from the earlier T-UGOm implementation over the Amazon River and shelf system, the value and spatial distribution of the rugosity equivalent length closely controls the simulation accuracy. Unlike in our previous publication, no special rugosity exploration was performed, and we adopted the optimal rugosity as described in Le Bars et al. (2010). Naturally, it is likely to be a sub-optimal setting for the new implementation. However, the (quite heavy) process of seeking a new set of optimal setting was postponed to meet the assimilation exercise scheduled in 2010. Moreover, the use of the rugosity length setting, tuned for a previous model implementation, with the present implementation can be seen as a methodology consistency assessment.

The M_2 tidal simulation has been compared to in situ data and altimetry-derived data (Figure 8). It compares fairly well to the first, optimized Amazon tides atlas (Le Bars et al., 2010), however

significant changes appear along the Amazon and Para River mouth. The vector differences

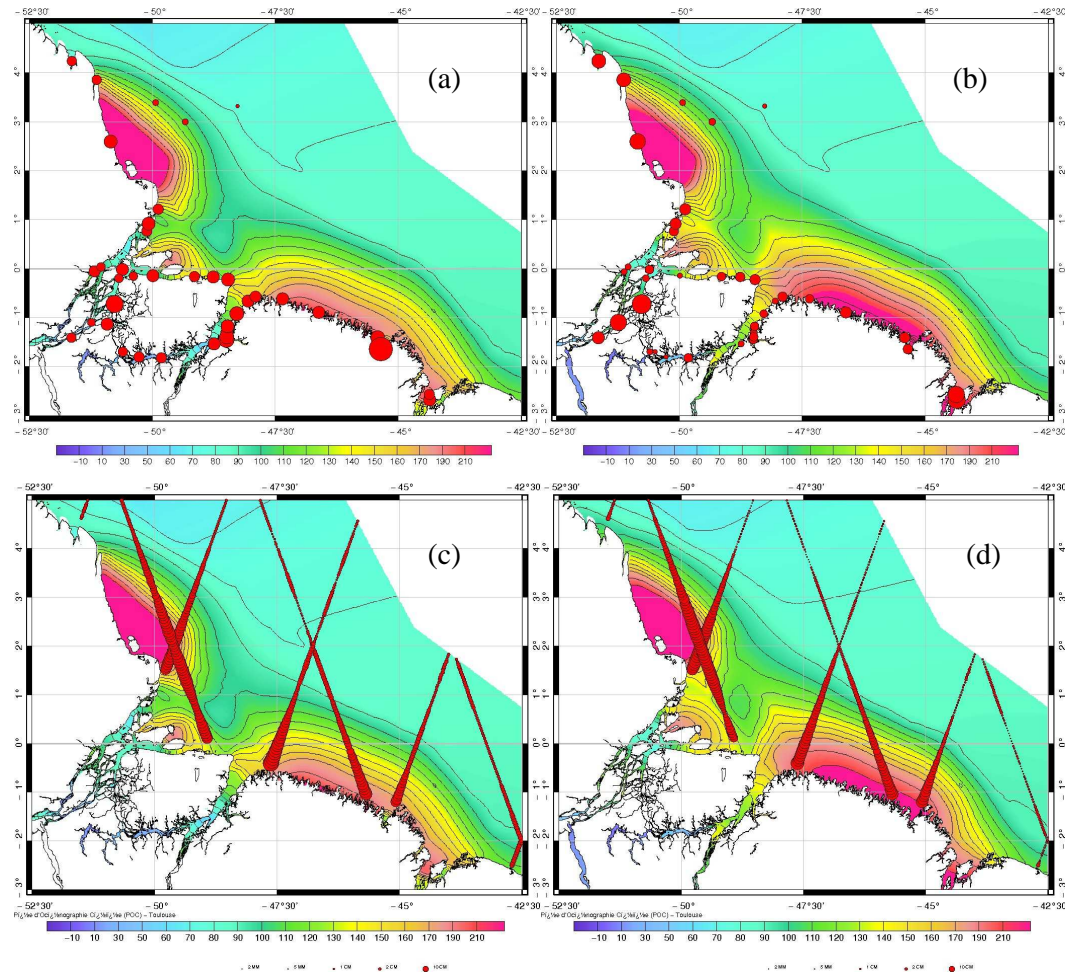


Figure 8 : M_2 tide amplitude and vector comparison with in situ data (from Beardsley et al.) and altimetry-derived data. Left panels (a) and (c) for the former version (Le Bars et al., 2010) of the Amazon tidal model, right panels (b) and (d) for the present version. The size of the red dots is proportional to the vector misfits. The reduction of misfits is almost general from the former version to the present one, especially in the Pará River and on-shore regions.

against tide gauges plotted in Figure 8-a,b clearly demonstrates a reduced level of errors in the new M_2 simulation. It is quite striking inside the Pará River and along the Marajó Island North coasts. Marginal increased level of errors can be observed in the Northern Shelf part and along the South Amazon Channel. Vector differences against altimeter-derived data plotted in Figure 8-c,d lead to a similar conclusion.

The overall improvements are confirmed on Figure 9. The tidal amplification in the South-East region is larger in the present simulation, as well the amplitude inside the Amazon and Pará River estuary. In the former, comparison with data show that it is in fact too large, and agreements with data was better in the earlier atlas. In the latter, reversely, the increase in tidal amplitude turns to improve the model accuracy. On the phase lag point of view, the

improvement is quasi-general compared to the earlier atlas. This is indeed a very favorable situation: phase lag accuracy is driven mainly by the tidal propagation, hence depths. Therefore one can infer that the improvements due to AB-II have a direct, positive impact on the model phase's accuracy. Tidal amplitude are more sensitive to bottom friction, especially in shallow waters. The examination of the tidal energy fluxes (Le Bars, 2010) shows that the amplitude of tides is directly correlated with the tidal energy propagation from the shelf edge off-shore the South-East region. In other words, tuning the friction on the East shelf will allow for modulating the tidal amplitude there without affecting significantly the rest of the solution.

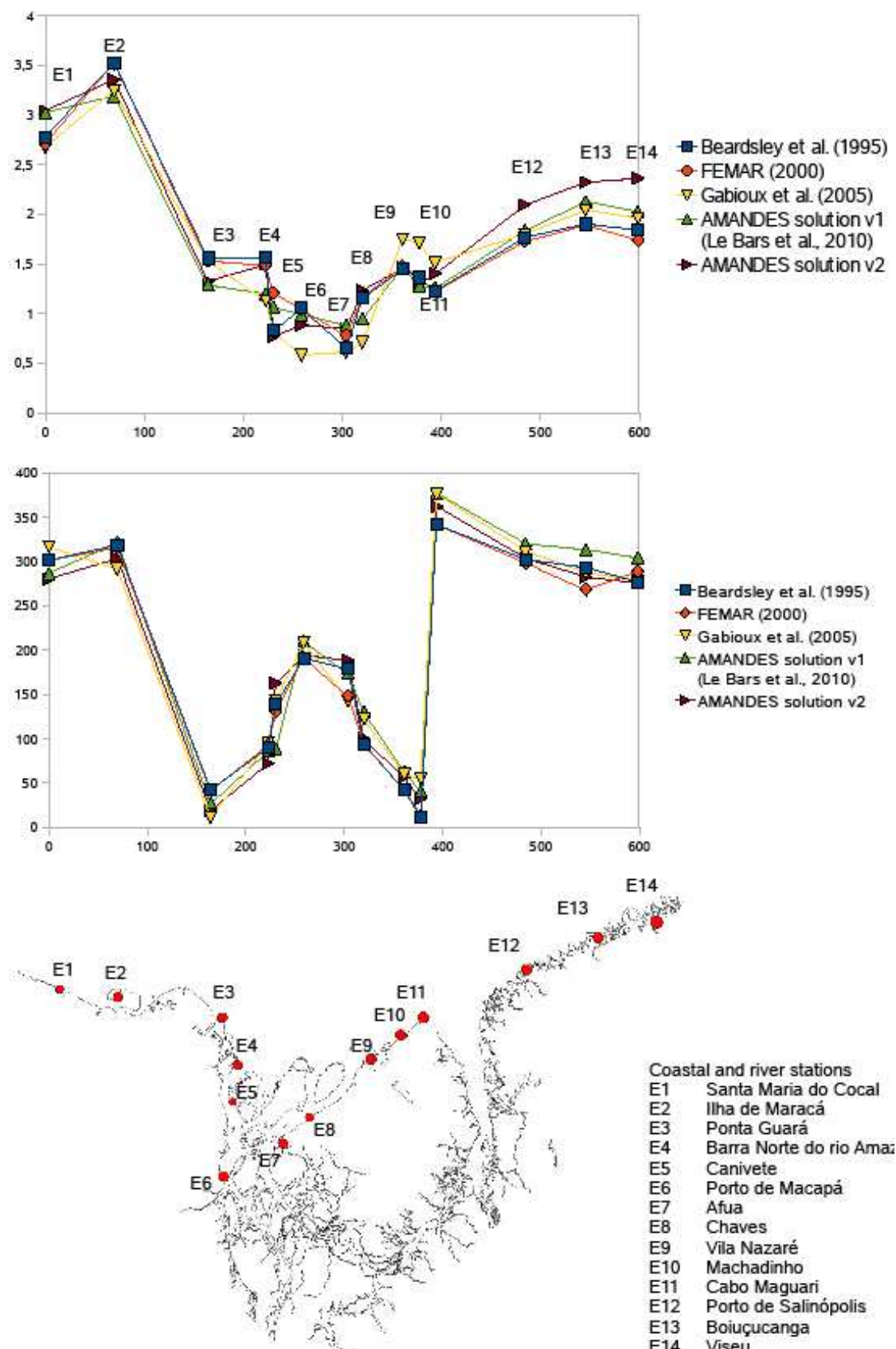


Figure 9 : M₂ tide amplitude and phase comparison with in situ data (from Beardsley et al.). FEMAR indicates tide gauge data, Beardsley a model based on data interpolation. Gabioux, AMANDES v1 and v2 are hydrodynamical models

Conclusion

The unusual dimension and complexity of the river and estuary, the existence of a wide, shallow shelf, the also extraordinary characteristics of the local hydrodynamics, all make the Amazon River system a very demanding scientific object, both in terms of observation, description and numerical modeling. Beside the additional flexibility integrated in T-UGOm to deal with the heterogeneous domain conditions, considerable software developments have been carried out to achieve this task, such as the integration of geo-referenced space imagery in our model's graphic user interface (GUI) and an improved database edition toolkit embedded in our GUI. Despite this powerful technology, a significant part of the manpower available for the AMANDES project has been dedicated to reconstruct precise geographical databases appropriate to be used in a numerical model. The geographical and geophysical databases presented in this document are more detailed and more accurate than the currently available digital databases (to the knowledge of the authors). They can be downloaded from the LEGOS website (<http://legos.obs-mip.fr>) and can be freely used for academic studies (please do consider that they are not appropriate for any other purposes, such as navigation). The AMANDES model's unstructured mesh has been rebuilt using the new bathymetry and shoreline DDBs and a tidal simulation has demonstrated the improvements due to the use of these DDBs. The altimeter-derived harmonic constants database provides an unprecedented observational dataset of the tidal elevations over the Amazon Shelf. Data error are also been made available to allow the most efficient and sensible use of the data. Naturally the effort of improving the present DDBs and the tidal atlas will continue (for the latter spectral assimilation will be applied to the AMANDES tidal model during year 2010), and be released in consequence.

Acknowledgements

This work has been mainly supported by the French Research National Agency (ANR) and the French National Space Agency (CNES). A special thanks goes to the French and Brazilian hydrology groups and IRD for their contributions to the AMANDES campaigns. Altimetry data used in this study were developed, validated, and distributed by the CTOH/LEGOS, France. Finally, the authors also thank Jacques Callède for giving precisions about the channels (furos) connecting the River Amazon and the River Pará.

References

Beardsley, R.C., Candela, J., Limeburner, R., Rockwell Geyer, W., Lentz, S.J., Castro, B.M., Cacchione, D., Carneiro, N., 1995. The M_2 tide on the Amazon shelf. *Journal of Geophysical Research* 100 (C2), 2283–2319.

Carrère L., Le Provost C., Lyard F., On the statistical stability of the M_2 barotropic and baroclinic tidal characteristics from along-track TOPEX/Poseidon satellite altimetry analysis *J. Geophys. Res.*, 109, C03033, 2004

FEMAR, 2000. Catalogo de estações maregráficas Brasileiras. Fundação de Estudos do Mar, Brazil. Available from:

<http://www.fundacaofemar.org.br/biblioteca/emb/cat_emb.html>

Gabioux, M., Vinzón, S.B., Paiva, A.M., 2005. Tidal propagation over fluid mud layers on the amazon shelf. *Continental Shelf Research* 25, 113-125.

Le Bars, Y., Lyard, F., Jeandel, C., Dardengo, L., 2010. The AMANDES tidal model for the Amazon estuary and shelf. *Ocean Modelling* 31, 132-149.

Le Bars, Y., 2010. Modélisation de la dynamique océanique barotrope dans l'estuaire et le plateau amazoniens. Ph.D. Thesis, Université Toulouse 3 Paul Sabatier, 118, Route de Narbonne -- F-31062 Toulouse Cedex 9, France.

Lyard F., Lefevre F., Letellier T., Francis O., 2006, Modelling the global ocean tides: modern insights from FES2004, *Ocean Dynamics*, 56, 394-415, <http://dx.doi.org/10.1007/s10236-006-0086-x>

Monahan, D., 2008. Mapping the floor of the entire world ocean: the general bathymetric chart of the oceans. *Journal of Ocean Technology* 3 (1), 108.

Munk, WH, Cartwright DE (1966) Tidal spectroscopy and Prediction. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*. 259: 533-581

Ray RD, Mitchum GT (1996) Surface manifestation of internal tides generated near Hawaii, *Geophys. Res. Letter* 23 (16): 2101-2104

Roblou L., Lamoroux J., Bouffard J., Lyard F, Le Henaff M., Lombard A., Marsaleix P., De Mey P., Birol F, Post-processing altimeter data toward coastal applications and integration into

coastal models, in Coastal Altimetry, Ed., in press

Shewchuk, J. R., 1996. Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator, Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering" (Ming C. Lin and Dinesh Manocha, editors), volume 1148 of Lecture Notes in Computer Science, pages 203-222, Springer-Verlag, Berlin.

Smith, W.H.F., Sandwell, D.T., 1997. Global seafloor topography from satellite altimetry and ship depth soundings. *Science* 277, 1957–1962

Wessel, P., and W. H. F. Smith, A Global Self-consistent, Hierarchical, High-resolution Shoreline Database, *J. Geophys. Res.*, 101, #B4, pp. 8741-8743, 1996.

4.2 Ondes de marée

Pour atteindre une taille publiable, nous n'avons pas pu détailler les ondes de marées obtenues dans la nouvelle solution. Dans la présente section, nous détaillons donc les ondes K_1 , S_2 et M_4 . Les données de validation utilisées sont les plus récentes traces altimétriques fournies par X-Track et les données de [Femar, 2000].

4.2.1 Onde M_2

Cette onde a été détaillée dans l'article. La figure 4.1 en représente la phase, l'amplitude et la comparaison avec les données de validation. La validation montre une bonne adéquation entre le modèle et les observations, y compris lorsque l'on entre dans les fleuves.

4.2.2 Onde K_1

La figure 4.2 représente la phase, l'amplitude et la comparaison avec les données de validation pour l'onde K_1 .

Elle présente essentiellement un maximum au niveau de l'île de Maracá et une répartition des phases proche de celle de l'onde M_2 . La validation montre un léger manque d'amplitude au large de Ponta Guará, au niveau du croisement des traces altimétriques 202 et 37 (voir chapitre 2), ainsi qu'à l'intérieur du fleuve Pará. Au contraire, les amplitudes sont un peu fortes dans le fleuve Amazone. La phase simulée est en revanche bien en accord avec les observations. Adapter légèrement la rugosité devrait donc permettre d'atteindre une bonne précision (voir l'article reproduit au début de ce chapitre).

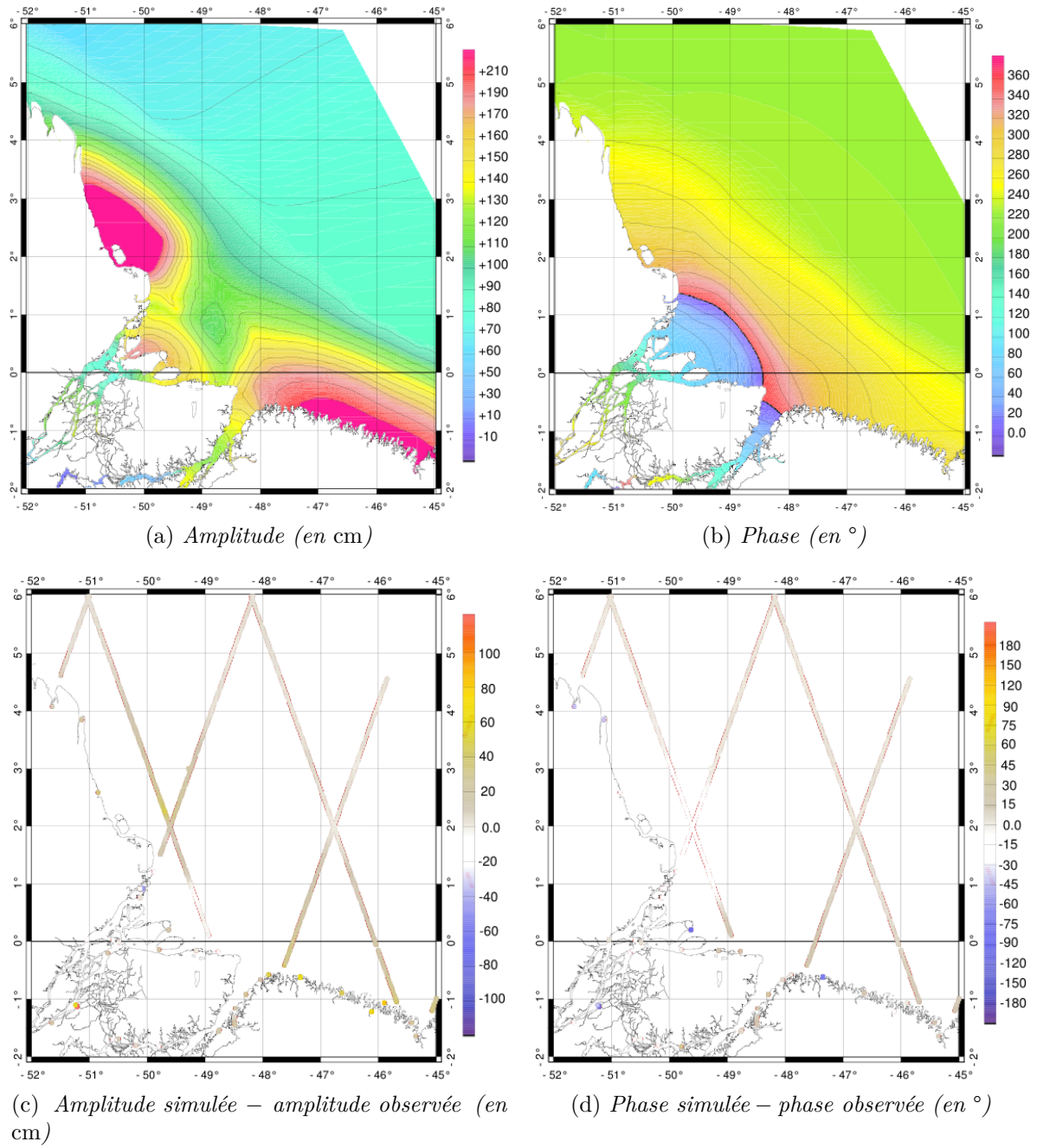
4.2.3 Onde S_2

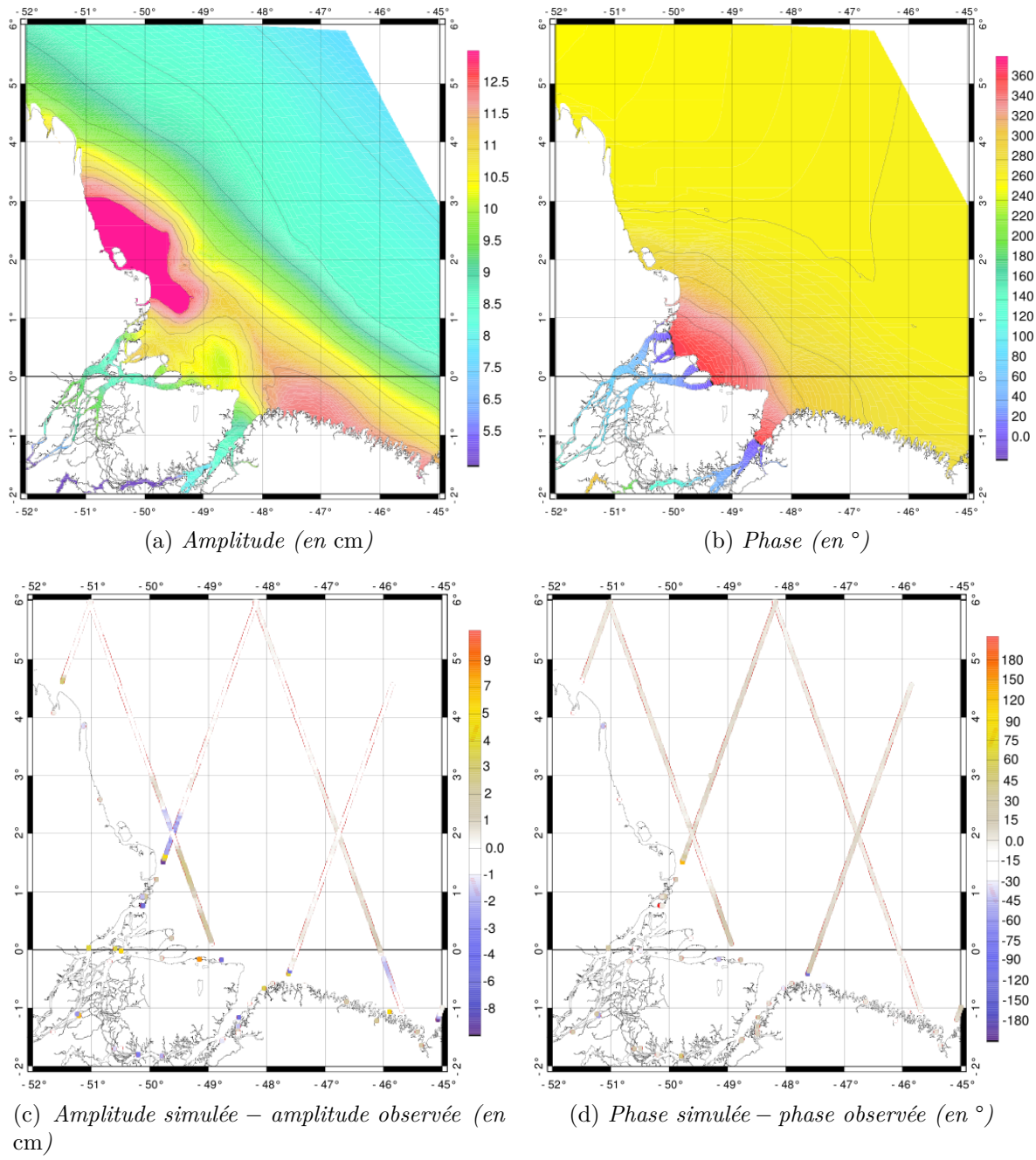
La figure 4.3 représente la phase, l'amplitude et la comparaison avec les données de validation pour l'onde S_2 .

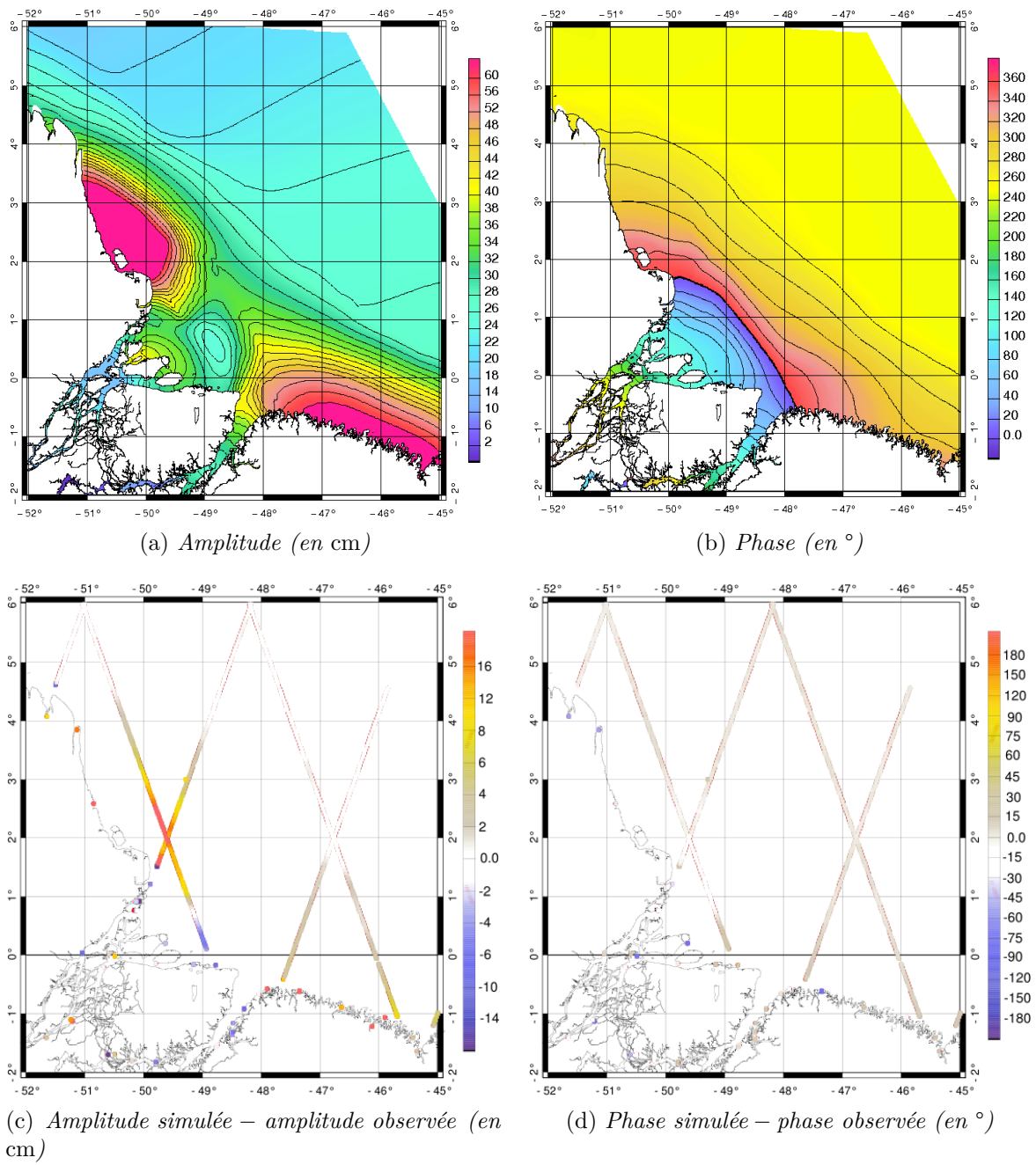
Globalement, elle présente une configuration semblable à celle de M_2 , mais une amplitude plus faible. La validation montre une amplitude trop forte au niveau du croisement des traces 202 et 37, ainsi qu'entre Salinópolis et Viseu. À l'inverse, les amplitudes sont trop faibles à l'embouchure de l'Amazone et dans le fleuve Pará. En revanche, une fois de plus, la phase simulée est bien en accord avec les observations. Là encore, l'adaptation de la rugosité devrait donc permettre d'atteindre une bonne précision.

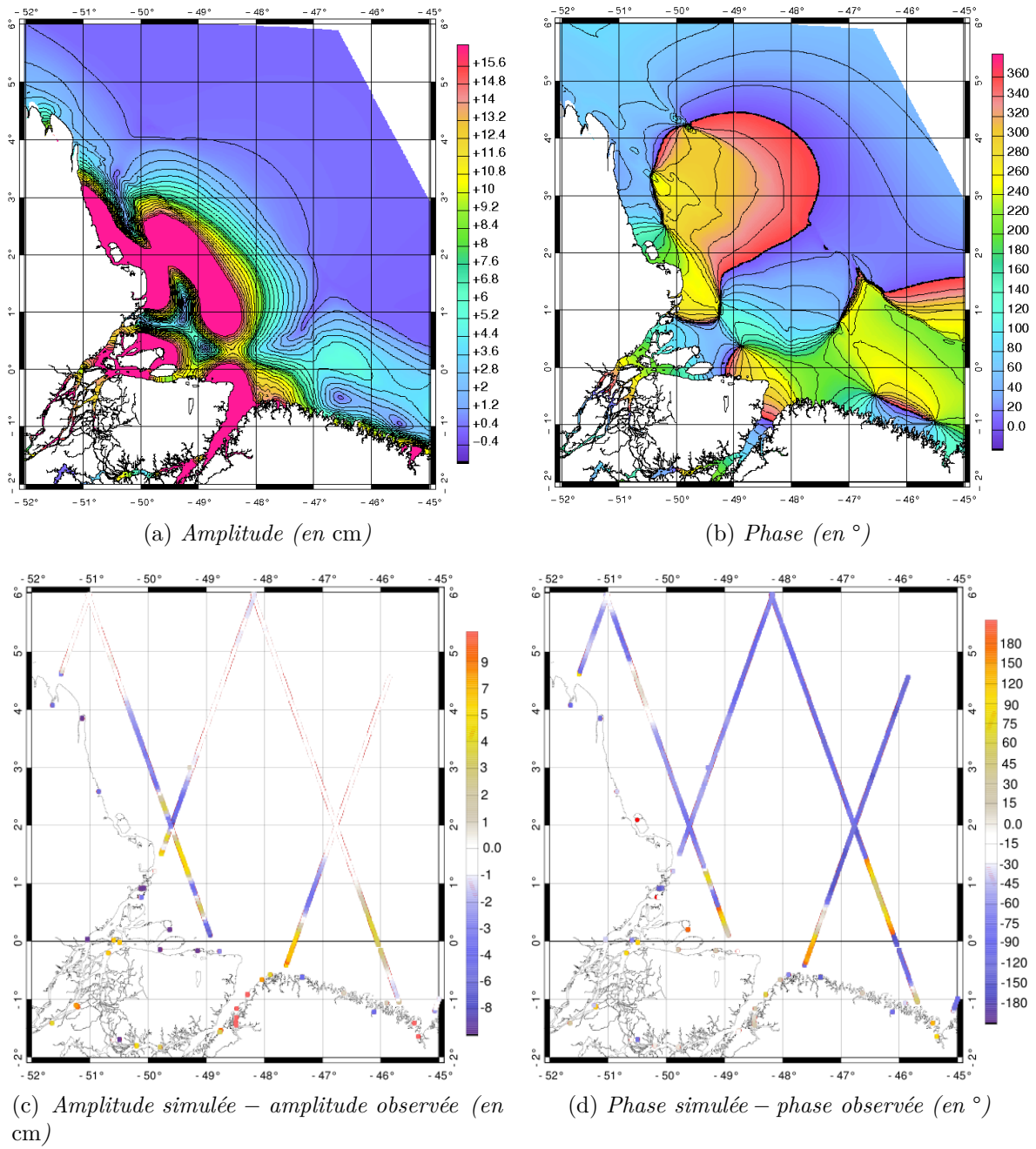
4.2.4 Onde M_4

La figure 4.4 représente la phase, l'amplitude et la comparaison avec les données de validation pour l'onde M_4 .

FIGURE 4.1 – Onde M_2 obtenue avec la bathymétrie AB2

FIGURE 4.2 – Onde K₁ obtenue avec la bathymétrie AB2

FIGURE 4.3 – Onde S_2 obtenue avec la bathymétrie AB2

FIGURE 4.4 – Onde M_4 obtenue avec la bathymétrie AB2

Au contraire de S_2 , sa configuration est très différente de celle de M_2 , tant au niveau de l'amplitude que de la phase. Ses zones de plus fortes amplitudes sont situées au niveau de l'île de Maracá et dans les deux fleuves. On note la présence de plusieurs points amphidromiques, notamment devant l'île de Marajó et au large de Boiuçucanga.

La comparaison avec les observations montre des amplitudes trop forte dans les deux fleuves et un important décalage de phase sur tout le domaine. M_4 étant une onde non-linéaire, elle dépend fortement de la qualité avec laquelle les autres ondes sont représentées et ne pourra être fixée qu'une fois que les autres ondes seront bien prises en compte.

4.2.5 Tableau statistique

Le tableau 4.1 résume les scores statistiques de la comparaison avec les données de validation pour chacune des ondes.

Onde	Δ_A		Δ_G		Δ_Z	
	Moyenne (cm)	σ (cm)	Moyenne (°)	σ (°)	$\ \overline{\Delta_Z}\ $ (cm)	RMS (cm)
K_1	-0,2	3,5	-0,1	11,6	0,1	3,2
M_2	8,2	12,9	-2,3	12,4	11,1	22,9
S_2	2,5	6,2	-2,5	12,4	2,9	7,0
M_4	-0,2	3,7	-59,5	70,8	2,5	6,7

TABLE 4.1 – *Comparaison entre la solution et les données de validation – A indique l'amplitude, G la phase et $Z = Ae^{iG}$*

Globalement, le tableau montre les bons résultats de notre simulation, à l'exception de la phase de M_4 . Les dernières imprécisions restante seront corrigées en réglant le coefficient de frottement dans la région.

4.3 D'une carte papier à un trait de côte numérique

Afin de ne pas trop l'alourdir, la chaîne de traitement mise en place permettant de passer d'une carte maritime papier à un trait de côte numérique n'a pas été détaillée dans l'article reproduit précédemment, car il s'agit d'un sujet purement technique. Elle peut néanmoins s'appliquer à d'autres cas, nous la détaillons donc ici.

4.3.1 Digitalisation

La première étape consiste à numériser la carte pour en faire une image bitmap (par exemple au format JPEG). Cette étape a été confiée à une entreprise spécialisée dans ce domaine.

4.3.2 Vectorisation

Ensuite, il faut vectoriser la carte, afin d'avoir non plus une description de chaque pixel, mais de chaque trait de côte de la carte. Le logiciel Inkscape propose un module et de la documentation¹ permettant la réalisation de cette opération.

4.3.3 Retour aux coordonnées sphériques

L'image vectorielle décrit les différents éléments de la carte dans un repère cartésien. Il faut donc les ramener aux coordonnées sphériques de la surface terrestre. Pour ce faire, j'ai eu recours à une technique dérivée des coordonnées barycentriques.

Inkscape vectorise les traits de côtes sous forme de splines cubiques. Elles sont données avec un point de départ, un point d'arrivée et deux points de contrôles. Pour les transformer en segments (seules primitives utilisables dans le modèle), pour une spline je fais trois segments : du point de départ au premier point de contrôle, du premier point de contrôle au deuxième et du deuxième point de contrôle au point d'arrivée. Il reste à ramener les coordonnées de ces segments dans le bon repère.

4.3.4 Coordonnées barycentriques

On définit les coordonnées barycentriques dans un triangle ainsi (voir par exemple [Tauvel, 2005]) :

Définition 4.3.1. *Soit un triangle de sommets A , B et C . Pour tout point M à l'intérieur de ce triangle, il existe un unique triplé $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant les relations suivantes :*

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ a_0 \vec{MA} + a_1 \vec{MB} + a_2 \vec{MC} = \vec{0}. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Le triplé (a_0, a_1, a_2) permet donc de caractériser de manière unique le point M . a_0 , a_1 et a_2 sont les coordonnées barycentriques de M dans le triangle ABC (car le point M est alors assimilé à un barycentre). Ce triplé est conservé par toute transformation linéaire.

Ainsi, si une transformation linéaire transforme le triangle ABC en le triangle $A'B'C'$, alors le point M' , image de M par la même transformation, aura les mêmes coordonnées barycentriques dans le nouveau triangle. En conséquence, les coordonnées du point M' répondent à la relation suivante :

$$M' = \frac{a_0 A' + a_1 B' + a_2 C'}{a_0 + a_1 + a_2}. \quad (4.3.2)$$

Théoriquement, $a_0 + a_1 + a_2 = 1$, mais, pour des raisons de stabilité numérique, il est tout de même préférable de renormaliser par la valeur de cette somme.

1. <http://www.inkscape.org/doc/tracing/tutorial-tracing.fr.html>

Donc, si l'on connaît les coordonnées des points A , B et C , ainsi que celles des points A' , B' et C' , on peut aisément calculer, pour tout point M , les coordonnées de son projeté M' . En effet, d'après le système 4.3.1, le triplé (a_0, a_1, a_2) est la solution du système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \vec{MA} & \vec{MB} & \vec{MC} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.3)$$

Ce système peut être résolu de manière très classique, par exemple à l'aide de l'algorithme LU (voir par exemple [Cormen *et al.*, 2004]).

On peut assimiler une carte à un quadrilatère et la zone de la surface du globe représentée par la carte à un autre quadrilatère. Notons les sommets du premier quadrilatère, que nous appellerons quadrilatère de départ, A_0 , A_1 , A_2 et A_3 et les sommets du deuxième, nommé quadrilatère d'arrivée, B_0 , B_1 , B_2 et B_3 . Il est aisé de calculer A_4 (respectivement B_4) le centre du quadrilatère de départ (respectivement le centre du quadrilatère d'arrivée) :

$$\begin{cases} A_4 = \frac{A_0 + A_1 + A_2 + A_3}{4}, \\ B_4 = \frac{B_0 + B_1 + B_2 + B_3}{4}. \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Pour tout point de la carte, en admettant qu'il existe une transformation linéaire permettant de passer aux coordonnées sur Terre, on peut donc déterminer s'il est situé dans le triangle $A_0A_1A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_2A_3A_4$ ou $A_3A_0A_4$, déterminer ses coordonnées barycentriques dans ce triangle et enfin calculer la latitude et la longitude du point sur le globe terrestre qui lui est associé.

L'automate nommé « **svg2scan** » effectue les différentes étapes nécessaires à la conversion d'un fichier obtenu à l'aide d'Inkscape en un fichier de trait de côte au format utilisable par T-UGOm, tandis que « **filter** » permet de filtrer un signal bathymétrique bruité et « **bathsonddis** » permet de disperser un amas de données bathymétriques trop denses.

4.4 Conclusion partielle

Nous avons donc mis en place une chaîne de traitement des données permettant d'obtenir une bathymétrie et un trait de côte précis et réaliste. En nous basant sur des cartes maritimes et les données collectées pendant les campagnes Amandes, nous avons pu à la fois étendre le maillage jusqu'au point limite où l'influence de la marée est sensible et affiner les bases de données numériques de la région disponible. Ceci forme un préalable nécessaire à toute bonne modélisation et nous ouvre la voie vers la modélisation des autres phénomènes hydrodynamiques ayant lieux dans la région.

Conclusion

L'objectif de cette thèse était donc de répondre au besoin de modélisation du projet Amandes, c'est-à-dire à terme de modéliser le transport particulaire dû au fleuve Amazone au niveau de son estuaire. Dans ce but, nous avons vu comment appliquer une modélisation sur grilles non-structurées à la dynamique barotrope bidimensionnelle océanique (chapitre 1). Cette méthode se caractérise principalement par sa souplesse, qui lui permet notamment de s'adapter finement aux particularités géographiques de la zone modélisée. Dans le cas de l'Amazone, où la géographie est particulièrement complexe, il s'agit d'une caractéristique critique.

Nous avons également vu comment confronter cette modélisation aux mesures (chapitre 2). Pour cette étude, nous avons eu recours à des mesures satellites, marégraphiques et issues de campagnes de mesures. Nous avons également abordé les méthodes permettant de traiter ces mesures.

Tout ceci a formé une première partie de cette étude, établissant la méthodologie avec laquelle nous avons abordé la question du transport particulaire par le fleuve Amazone. Dans un premier temps, qui constitue la deuxième partie de notre étude, nous nous sommes focalisés sur le cas de la marée dans l'estuaire, qui est le principal phénomène hydrodynamique dans la zone.

Notre étude de la marée dans la région a mis en évidence l'importance du frottement de fond et de sa variabilité géographique (chapitre 3). En améliorant la prise en compte par le modèle de cette friction de fond, nous avons fait descendre la RMS de l'erreur complexe comparant la différence entre la modélisation et les mesures de 54 cm à 27 cm.

Également, nous avons mis en évidence l'importance de l'influence de la bathymétrie et du trait de côte sur la modélisation. En conséquence, nous avons mis en place une méthode permettant d'affiner les bases de données numériques disponibles concernant la région, en nous basant sur des cartes maritimes et les données collectées pendant les campagnes Amandes (chapitre 4). Cette méthode nous a permis d'étendre la maillage du modèle plus en amont dans le fleuve, jusqu'à Óbidos, où les données sur le débit du fleuve sont plus faciles à obtenir et limite à laquelle l'influence de la marée se fait encore sentir. Également, cela nous a permis d'affiner notre modélisation.

La comparaison avec les données collectées et les autres modèles existant, tel que [Gabioux *et al.*, 2005], a montré la pertinence de cette approche dans le cadre de l'étude de la marée. En effet, les solutions obtenues, comparativement à celles déjà publiées, s'avère plus proches des mesures effectuées. Ceci permet de conduire à la réalisation d'un atlas des marées dans la région, qui inclura l'assimilation de données, principalement

d'origine satellite. Pour des raisons purement techniques, cet atlas n'est pas inclus dans le présent document. Il fera l'objet d'une publication en préparation au moment de la rédaction de ces lignes.

Cette étude a donc montré la pertinence et l'adéquation de la modélisation hydrodynamique non-structurée à la dynamique de l'estuaire de l'Amazonie. Elle a permis d'établir un modèle précis et de grande étendue, ainsi que de prendre en compte les phénomènes dynamiques d'amplitudes principales dans cette région. Également, elle ouvre des perspectives pour un travail sur des phénomènes plus fins, notamment le transport particulaire par le fleuve. Au-delà du projet Amandes, le modèle établi dans cette étude est déjà utilisé par le projet Swot¹ (*Surface Water Ocean Topography*), qui vise à proposer un satellite à large couverture pour l'hydrologie continentale et les mesures océanographiques, utilise le modèle Amandes pour évaluer les apports qu'apporteront cette nouvelle technologie par rapport aux mesures altimétriques.

Perspectives

Établir un nouveau modèle hydrodynamique dans le but d'étudier le transport de matériaux par le fleuve Amazonie dans l'océan Atlantique était un sujet trop ambitieux pour une seule thèse. La présente étude ne peut donc être qu'un premier jalon pour un travail plus vaste. En conséquence, cette thèse a principalement ouvert des perspectives, plutôt que d'apporter des réponses définitives sur les phénomènes hydrodynamiques ayant lieu au niveau de l'estuaire de l'Amazonie. Elle devra donc servir de point de départ à une série d'études portant tant sur les particularités de la zone que sur des problèmes de pure modélisation.

À moyen terme, l'objectif est que le modèle puisse suivre le chemin de traceurs, c'est-à-dire, au niveau de la modélisation, essentiellement la trajectoire de particules que l'on fait entrer en un point du domaine de modélisation. À plus long terme, en fonction des avancées que le modèle aura permis, des données qu'il sera possible de collecter et des demandes tant du projet Amandes que d'autres projets qui pourraient être intéressés, le modèle devra certainement prendre en compte plus précisément les différents processus qui ont lieu dans la colonne d'eau, ce qui conduira à établir un modèle 3D sur une partie du domaine étudié, le modèle 2D qui a été établi au cours de cette thèse servant de mode externe.

En particulier, cette étude, à la suite de [Gabioux *et al.*, 2005], a mis en exergue l'importance du frottement de fond et mis en évidence la difficulté qu'il y a à paramétriser un tel phénomène. En conséquence, il apparaît nécessaire d'explorer plus avant la couche de mélange, ce qui nécessite de faire appel à un modèle tridimensionnel et probablement barocline. Une telle étude pourra aisément se généraliser à d'autres régions que le seul estuaire de l'Amazonie. Cependant, il touche au problème de la turbulence en mécanique des fluides, qui reste un sujet encore difficilement maîtrisé; en conséquence, son étude demandera certainement un travail minutieux.

1. <http://www.legos.obs-mip.fr/recherches/missions/water/>

Ce problème du frottement de fond intervient dans toutes les zones où les fonds sont faibles, à plus forte raison si le transport sédimentaire est important. Il est également corrélé aux phénomènes de houle, qui, en changeant la forme des fonds, fait varier ce frottement. Notamment, [Guillou, 2007] l'étudie dans le cas de la manche. Également, on soupçonne que le frottement de fond est différent dans la Mer du nord que dans le reste de la zone atlantique nord-est. [Baumert *et al.*, 2005] donne de nombreux éléments sur la turbulence dans le milieu marin et constitue une source utile pour un tel travail.

Pour les modélisations présentées ici, nous n'avons pas inclus le débit du fleuve. Étudier le transport dû au fleuve nécessitera évidemment de prendre en compte ce débit. Un premier travail exploratoire a de plus montré qu'il peut avoir une légère influence sur la marée, ce qui pousse à l'inclure dans les modélisations devant conduire à l'établissement de l'atlas de marée. Néanmoins, ceci ajoute une difficulté supplémentaire, car, au-delà des questions de pure modélisation, il est délicat d'établir des mesures précises et de longue durée de ce débit. Les campagnes de mesures des projets Amandes et surtout Hybam devraient néanmoins pourvoir à ce besoin.

Introduire le débit du fleuve pose également la question de la modélisation du bassin versant de l'Amazonie. Dans le cadre du projet Amandes, l'objectif est d'étudier le transport de l'Amazonie, plus que l'hydrodynamique du bassin. En conséquence, il n'est pas nécessaire de prendre en compte l'intégralité des courts d'eau de la zone. Néanmoins, déterminer la pertinence d'intégrer tel ou tel rivièrè sera une étape importante du réglage à venir du modèle. La même question se pose avec la prise en compte des *furos* : pour l'instant, nous avons pris en compte deux canaux qui nous semblaient principaux. Néanmoins, seule une étude itérative de leur cas permettra d'évaluer pleinement lesquels ont une influence sensible sur le système.

Tout ceci va nécessiter l'apport de jeux de données importants plus en amont du fleuve, lesquelles données restent difficilement accessibles. Néanmoins, le projet Hybam, ainsi que les missions sur l'Amazonie organisée par le projet Swot devraient permettre d'obtenir un ensemble de mesures conséquent.

Également, nous n'avons pas pris en compte l'influence des courants marins, ni des vents. Or, [Nikiema *et al.*, 2007] ont montré que ces deux éléments ont une influence essentielle sur l'extension du panache de l'Amazonie. L'étude du transport passe par celle du panache, ces deux éléments doivent donc également être ajouté très rapidement dans le modèle. De plus, l'étude de tous ces phénomènes nécessitera rapidement l'utilisation d'un modèle 3D, fût-il barotrope. La partie tridimensionnelle du modèle T-UGOm étant en train de quitter le stade purement expérimental, il sera possible d'étendre prochainement le modèle du projet Amandes en un modèle 3D.

De plus, la modélisation du transport, c'est-à-dire le déplacement de toute la colonne d'eau et ce qu'elle contient, par exemple des sédiments, nécessite un travail sur les

schémas d'advection². Ce travail a déjà commencé dans le cadre du développement de T-UGOm.

L'étude des schémas d'advection dans le cadre de la modélisation non-structurée de l'océan n'est pas nouvelle (voir par exemple [Le Roux *et al.*, 1997]). Néanmoins, il s'agit encore d'un sujet délicat, objet d'études telle que [Hanert *et al.*, 2004]. Dans le contexte bidimensionnel non-conservatif, en posant $c(x, y, t) \in \mathbb{R}^+$ la concentration du composant advecté, l'advection s'exprime ainsi :

$$\underbrace{\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_H c}_{\text{advection}} = \underbrace{\nabla_H \cdot k_h \nabla_H \nabla c}_{\text{diffusion}}$$

et on impose au niveau du fleuve et de la frontière ouverte une concentration, tandis que l'on applique la condition d'imperméabilité aux autres frontières du modèle.

Une telle formulation, cependant, ne garantit pas la conservation du minimum et du maximum de concentration (elle peut descendre au-dessous de 0 % ou au-dessus de 100 %). De plus, des oscillations purement numérique peuvent apparaître en court de modélisation. Un moyen de contrôler ses problèmes est d'avoir recours à des schémas de type *upwind*, c'est-à-dire ne prendre en compte que la quantité de concentration qui arrive dans un élément sans celle qui en ressort pour calculer la nouvelle concentration. De tels schémas créés de la diffusion.

La diffusion existe au niveau moléculaire. De plus, le coefficient de diffusion permet de prendre en compte des phénomènes sub-échelle dans le modèle. Toutefois, les choses peuvent aussi être vue d'un point de vue inverse : la diffusion contrôle l'aspect *upwind* du schéma. k_h devient alors un paramètre de contrôle du modèle.

Un schéma spécifique se basant sur ces propriétés est en développement. Également, un module de volumes finis, plus adaptés au schéma de type *upwind*, pour T-UGOm est en court de développement. Une publication en préparation présentera ces aspects. Ces développements sont également abordés dans [Lyard, 2010].

L'advection entre en compte dès qu'il est question de transport, tant le transport de traceurs que le transport de polluants, par exemple. Ce phénomène, qui doit être modélisé dès qu'un fleuve est présent dans une zone d'étude, est donc au cœur de nombreux enjeux de simulation océanique de par le monde.

Intégrer l'advection au modèle permettra donc d'inclure les différents processus sédimentaire. Au cours de cette étude, des modélisations prenant en compte le phénomène de bancs découvrants ont été menées. Ces modélisations ont montré que cela n'avait aucune influence sur la marée. Cependant, le phénomène de découverture devra être pris en compte dès qu'il s'agira d'étudier le devenir des sédiments, dans la mesure où ses derniers se déposent lorsque la mer s'est totalement retirée d'une zone et où l'abondance de sédiment a une influence sur la présence ou non d'une zone découvrante.

2. L'advection est le transport d'une quantité scalaire conservée par un champ vectoriel. Un bon exemple est le transport de matière polluante par le flux d'une rivière. En météorologie et en océanographie, l'advection se réfère surtout au transport horizontal de certaines propriétés par les fluides considérés, dont le transport par le vent ou les courants : advection de vapeur d'eau, de chaleur, de salinité, *etc.*

D'un point de vue plus technique, prendre en compte la variabilité géographique du frottement de fond a permis l'établissement d'un algorithme original (voir annexe A). Cet algorithme est basé sur la théorie des graphes et la géométrie algorithmique. Au moment de la rédaction de cette thèse, il nécessitait encore un peu de travail et fera l'objet d'une publication ultérieure.

Enfin, la chute du taux de données acquises par l'altimétrie au niveau de l'île de Maracá mérite d'être exploré. Cela nécessitera certainement d'avoir recours à une mission sur place.

Tout ceci ouvre donc beaucoup de perspectives, qui devrait permettre de comprendre plus précisément les mécanismes qui font que l'on peut trouver dans l'océan Atlantique des traces de particules arrachées au niveau des montagnes andines. Comme souligné dans l'introduction, l'écosystème du bassin amazonien jouant un rôle crucial sur l'environnement terrestre, la compréhension de tels mécanismes sont d'un enjeu crucial. De plus, une telle étude permettra de mettre en lumière les mécanismes similaires que l'on peut trouver un peu partout sur le globe terrestre, notamment en ce qui concerne le frottement de fond et l'advection.

Annexes

Annexe A

Algorithme pour la discrimination de zones

Le fond des océans provoque une force de frottement qui s'oppose aux mouvements de l'eau et donc des marées. Sa formulation a été étudiée dans le chapitre 3. Toutefois, cette force de frottement dépend de la nature des éléments composants le fond marin. Bien entendu, le fond d'un océan n'est pas composé d'un unique matériau, de sorte que la traînée due aux frottements varie en fonction de la géographie des fonds.

Pour prendre cela en compte, T-UGOm permet à l'utilisateur de fournir une carte du fond, découpée en zones. Pour chacune des zones, l'utilisateur peut fournir le coefficient de frottement à appliquer en précisant sa valeur en un point de la zone. Si cette information n'est pas fournie, la valeur par défaut ($2 \cdot 10^{-3}$ m d'après la littérature) est utilisée.

T-UGOm est doté d'un algorithme permettant de déterminer si un point est ou non dans une zone, ce qui nous permet à la fois d'associer un coefficient de frottement aux zones et, en court de calcul, de déterminer quel coefficient appliquer. Par contre, la description des zones est à développer. Nous avons opté pour une description de zone par polygones. Les données que l'on transmet au modèle sont un ensemble de points, chacun de ses points étant associé à une liste de points auxquels il est relié (par des segments). Il faut reconstruire les polygones à partir de ces informations.

L'algorithme présenté ici est le premier que j'ai implémenté. Cet algorithme est complexe et ne couvre pas certains cas particuliers. Il existe une méthode qui est plus simple algorithmiquement parlant, permettant d'avoir un code à la fois plus léger et accessible, tout en étant plus performant et correspondant exactement au problème. En revanche, il fait appel à plus de connaissances en théorie des graphes. Toutefois, ce nouvel algorithme était encore au début de sa phase d'élaboration pendant la rédaction de cette thèse, raison pour laquelle il n'apparaît pas ici. Il fera l'objet d'une publication ultérieure.

Sommaire

A.1 Recherche des polygones	145
A.1.1 Recherche des cycles élémentaires	145
A.1.2 Recherche du nœud de plus haut degré de chacune des compo- santes fortement connexes	148
A.1.3 Adaptation à la recherche de polygones	151
A.2 Fixer le paramètre de rugosité	157
A.3 Utilisation dans T-UGOm	158
A.4 Conclusion partielle	161

A.1 Recherche des polygones

[Szwarcfiter et Lauer, 1975, Szwarcfiter et Lauer, 1976] proposent un algorithme de recherche des cycles élémentaires dans un graphe orienté. Un graphe orienté est un ensemble de nœuds relié entre eux par des arêtes orientées, de telle sorte qu'elles peuvent être parcourues dans un sens mais pas dans l'autre.

Définition A.1.1. *Soient a et b deux nœuds d'un graphe. Il existe un chemin de a vers b dans le graphe, noté $a \rightarrow b$ si et seulement si, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite de sommets, éventuellement vide, s_1, s_2, \dots, s_n telle que $(a, s_1), (s_1, s_2), \dots, (s_n, b)$ sont des arrêtes du graphe. Un cycle F est un ensemble de nœuds du graphes tels que $\forall v \in F, v \rightarrow v$. Le cycle est élémentaire lorsque le chemin ne passe qu'une fois par chaque sommet.*

Pour plus de détails sur la notion de graphe, voir [Berge, 1983].

Dans notre cas, nous avons un ensemble de points, interconnectés par des segments. En utilisant les points comme les sommets d'un graphe et en associant à chaque segment deux arêtes orientées, une parcourant le segment dans un sens, l'autre dans le sens inverse, alors un polygone est un cycle élémentaire du graphe ainsi défini, ce qui nous permet alors d'appliquer l'algorithme tel quel.

A.1.1 Recherche des cycles élémentaires

Soient :

- \mathbb{B} l'ensemble des booléens ;
- A la liste des adjacences de chaque sommet ;
- B un ensemble de listes, une par sommet ;
- N le nombre de nœuds dans le graphe ;
- *marque* indique pour chaque sommet s'il est marqué ou non ;
- *atteint* un tableau de booléens, indiquant, pour chaque sommet, s'il a été traité ou non.

L'algorithme nécessite deux procédures utilitaires, présentées dans les algorithmes A.1 et A.2.

Algorithme A.1 Procédure noncycle

ENTRÉES : $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$

insérer x dans $B(y)$
supprimer y de $A(x)$

L'algorithme de recherche exhaustive des cycles élémentaires dans un graphe fortement connexe est donné par l'algorithme A.3.

Enfin, l'algorithme A.4 permet de rechercher l'ensemble des cycles élémentaires dans un graphe quelconque.

Algorithme A.2 Procédure démarquer

ENTRÉES : $x \in \mathbb{N}^*$

```

marque( $x$ )  $\leftarrow$  faux
pour tout  $y \in B(x)$  faire
    insérer  $x$  dans  $A(y)$ 
    si marque( $y$ ) alors
        démarquer( $y$ )
    fin si
fin pour
vider  $B(x)$ 

```

Soient N le nombre de sommets, M le nombre d'arrêtes et C le nombre de cycles élémentaires, [Szwarcfiter et Lauer, 1975, Szwarcfiter et Lauer, 1976] indiquent que la complexité en temps de l'algorithme est $O(N + (C + 1)M)$ et sa complexité en espace est $O(N + M)$ – pour la notion de complexité en algorithmique, voir [Cormen *et al.*, 2004].

Fondamentalement, la structure de points reliés par des segments est un graphe non-orienté et associer à un segment deux arrêtes, l'une parcourant le segment dans un sens et l'autre dans le sens opposé, est la méthode classique pour assimiler un graphe non-orienté à un graphe orienté (voir [Berge, 1983]). Cette approche n'entraîne pas de modification de coût, ni en temps ni en espace.

Dans le cas d'un graphe orienté, deux sommets reliés par deux arrêtes (donc l'une parcourue dans un sens et l'autre dans le sens opposé) forment un cycle élémentaire. Or, en transformant le graphe non-orienté en graphe orienté, toutes les arêtes sont dédoublées, de sorte que chaque arrête donne naissance à un cycle élémentaire. Cependant, dans un graphe non-orienté, un cycle est nécessairement composé d'au moins trois points et d'au moins trois arêtes, il est donc aisé de palier à ce problème simplement en ne stockant pas les cycles composés uniquement de deux sommets. De plus, chaque arête ayant été dédoublée pour passer d'un graphe non-orienté à un graphe orienté, chaque cycle sera détecté deux fois. Donc, avant de stocker un cycle, il faudra s'assurer qu'il n'a pas déjà été trouvé. Ceci ne modifie pas les réactions de l'algorithme, puisqu'il ne s'agit que de stocker où non un cycle élémentaire qui a été détecté. Dans la mesure où l'algorithme recherche des cycles élémentaires, c'est-à-dire que chaque sommet du cycle ne doit être parcouru qu'une fois, il conserve sa justesse telle que présentée dans [Szwarcfiter et Lauer, 1975, Szwarcfiter et Lauer, 1976].

Dans l'algorithme A.4, la dernière boucle s'effectue sur tous les composants fortement connectés du graphe et il faut y chercher le nœud de plus grand degré, c'est-à-dire duquel entrent et sortent le plus d'arêtes. Ceci nécessite la mise au point d'un nouvel algorithme.

Algorithme A.3 Fonction cycle

ENTRÉES : $(v, q_1) \in (\mathbb{N}^*)^2$ **SORTIES :** **vrai** si au moins un cycle élémentaire dans la composante fortement connexe contenant v a été trouvé, **faux** sinon $f \in \mathbb{B}$ $(q, t) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $position$: tableau indiquant pour chaque sommet du graphe sa position dans la pile ;
il doit garder ses valeurs d'un appel de la fonction à l'autre $marque(v) \leftarrow \mathbf{vrai}$ $f \leftarrow \mathbf{faux}$ empiler v $t \leftarrow$ nombre de sommets dans la pile $position(v) \leftarrow t$ **si** $atteint(v)$ **alors** $q \leftarrow q_1$ **sinon** $q \leftarrow t$ **fin si****pour tout** $w \in A(v)$ **faire****si** $\neg marque(w)$ **alors****si** $cycle(w, q)$ **alors** $f \leftarrow \mathbf{vrai}$ **sinon** $noncycle(v, w)$ **fin si****sinon si** $position(w) \leq q$ **alors**la chaîne passant de v à w telle que stockée dans la pile est un cycle élémentaire $f \leftarrow \mathbf{vrai}$ **sinon** $noncycle(v, w)$ **fin si****fin pour**dépiler v **si** f **alors**démarquer (v) **fin si** $atteint(v) \leftarrow \mathbf{vrai}$ $position(v) \leftarrow N + 1$ **retourner** f

Algorithme A.4 Recherche de l'ensemble des cycles élémentaires d'un digraphe

ENTRÉES : A contient la liste des adjacences des composants fortement connexes d'un digraphe D

$b \in \mathbb{B}$

pour j variant de 1 à N **par pas de 1 faire**

$\text{marque}(j) \leftarrow \text{faux}$

$\text{atteint}(j) \leftarrow \text{faux}$

fin pour

pour tout composant fortement connecté non trivial **faire**

$s \leftarrow$ sommet du composant actuel de plus grand degré

$b \leftarrow \text{cycle}(s, 0)$

fin pour

A.1.2 Recherche du nœud de plus haut degré de chacune des composantes fortement connexes

Définition A.1.2. Une composante connexe d'un graphe G est un ensemble maximal $E \subset G$ de sommets tel que, $\forall (a, b) \in E^2$, $a \rightarrow b$ ou $b \rightarrow a$. Si $\forall (a, b) \in E^2$, $a \rightarrow b$ et $b \rightarrow a$, alors la composante est fortement connexe. Dans le cas d'un graphe non-orienté (notre cas), $a \rightarrow b \implies b \rightarrow a$, il y a donc équivalence entre composante connexe et composante fortement connexe.

Dans la pratique, nous devons donc simplement extraire le sommet de plus haut degré de chaque composantes connexes, l'algorithme se chargeant ensuite de parcourir les composantes en entier. Ces deux tâches peuvent s'effectuer en un seul algorithme : cela consiste à parcourir l'ensemble des points connectés au premier point du graphe et d'en retenir celui de plus haut degré pour le fournir au précédent algorithme. Tous les points parcourus sont marqués comme traités et on itère ce processus sur les points non encore traité. Pour ce faire, il faut d'abord la fonction « recherche » présentée dans l'algorithme A.5. Soient :

- D le graphe ;
- N le nombre de sommets dans le graphe ;
- traite un tableau de booléens indiquant, pour chaque nœuds, s'il a été traité ou non.

On note \neg la négation logique (voir par exemple [Cori et Lascar, 2004]).

L'algorithme A.6 permet la recherche du sommet de plus haut degré dans chacune des composantes connexes du graphe D .

Nous avons la proposition suivante :

Proposition A.1.1. La combinaison de l'algorithme A.5 et A.6 permet bien de déterminer le nœud de plus fort degré de chacune des composantes connexes d'un graphe non-orienté donné.

Algorithme A.5 Fonction « recherche »

ENTRÉES : $v \in D$ **SORTIES :** le sommet de plus grand degré de la composante connexe à laquelle appartient v $degreMax \in \mathbb{N}$ $(sommets, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $maxLocal \in \mathbb{N}$ $traite(v) \leftarrow \mathbf{vrai}$ $sommets \leftarrow v$ $degreMax \leftarrow \text{degré}(v)$ **pour tout** $w \in \text{voisins}(v)$ **faire** **si** $\neg traite(w)$ **alors** $n \leftarrow \text{recherche}(w)$ $maxLocal \leftarrow \text{degré}(n)$ **si** $maxLocal > degreMax$ **alors** $degreMax \leftarrow maxLocal$ $sommets \leftarrow n$ **fin si** **fin si****fin pour****retourner** $sommets$

Algorithme A.6 Recherche des composantes connexes et du nœud de plus haut degré

 $n \in \mathbb{N}^*$ **pour** i **variant de** 1 **à** N **par pas de** 1 **faire** $traite(i) \leftarrow \mathbf{faux}$ **fin pour****pour tout** $v \in D$ **faire** **si** $\neg traite(v)$ **alors** $n \leftarrow \text{recherche}(v)$ **fin si****fin pour**

Démonstration. L'algorithme A.5 teste tous les voisins d'un nœud d'un graphe qui n'ont pas été traités, donc, en partant d'un point d'une composante connexe n'ayant pas été traitée, il retourne bien le sommet de plus fort degré de la composante connexe considérée. L'algorithme A.6 appelle l'algorithme A.5 pour tous les points qui ne sont pas encore marqués, c'est-à-dire pour les points appartenant à une composante connexe qui n'a pas encore été traitée, de sorte qu'il considère une fois et une seule chacune des composantes connexes. \square

Outre quelques scalaires, les algorithmes A.5 et A.6 utilisent tous les deux un unique tableau de taille N , ce qui démontre la proposition :

Proposition A.1.2. *La combinaison de l'algorithme A.5 et A.6 a une complexité en espace de $\Theta(N)$.*

Enfin, en exécutant ces deux algorithmes, on parcourt une fois et une seule chacun des sommets du graphe, ce qui démontre la proposition :

Proposition A.1.3. *La combinaison de l'algorithme A.5 et A.6 a une complexité en temps de $\Theta(N)$.*

Il faut bien tester tous les nœuds pour connaître celui de plus haut degré, la complexité en temps de cet algorithme est donc optimale. De même, il est nécessaire de stocker au moins une fois tous les nœuds, la complexité en espace de l'algorithme est donc également optimale.

Pour résoudre notre problème, il faut donc adapter l'algorithme A.4 en le couplant avec l'algorithme A.6, ce qui donne l'algorithme A.7.

Algorithme A.7 Recherche de l'ensemble des cycles élémentaires

ENTRÉES : A contient la liste des adjacences des composantes fortement connexes d'un graphe D

$b \in \mathbb{B}$

pour j **variant de** 1 **à** N **par pas de** 1 **faire**

$\text{marque}(j) \leftarrow \text{faux}$

$\text{atteint}(j) \leftarrow \text{faux}$

$\text{traite}(i) \leftarrow \text{faux}$

fin pour

pour tout $v \in D$ **faire**

si $\neg \text{traite}(v)$ **alors**

$b \leftarrow \text{cycle}(\text{recherche}(v), 0)$

fin si

fin pour

Fondamentalement, je n'ai pas changé l'algorithme A.4 mais me suis simplement contenté de détailler la boucle sur toutes les composantes connexes, de sorte que l'exactitude et les performances de l'algorithme ne sont pas altérées.

A.1.3 Adaptation à la recherche de polygones

Nous avons donc une méthode pour trouver tous les cycles élémentaires d'un graphe. Cependant, dans notre cas, certains d'entre eux ne doivent pas être pris en compte. Considérons par exemple le cas de la figure A.1.

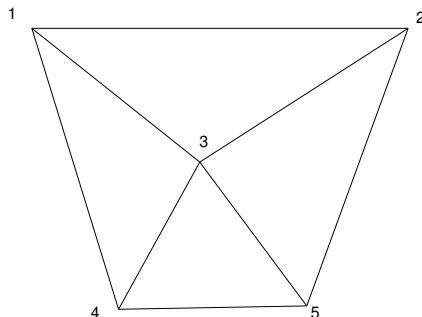


FIGURE A.1 – *Exemple de graphe*

Dans ce cas, l'algorithme détectera les cycles $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$, $(3, 4, 5)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 2, 5, 3)$, $(1, 2, 5, 4)$, $(1, 3, 5, 4)$, $(2, 3, 4, 5)$ et $(1, 2, 3, 5, 4)$. Or, nous recherchons seulement les cycles $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$ et $(3, 4, 5)$, c'est-à-dire que nous cherchons les polygones qui ne soient la combinaison d'aucun autre polygone. Ceci compose la base fondamentale minimale de cycles élémentaires indépendants (voir [Berge, 1983]).

D'après [Deo *et al.*, 1982], chaque base fondamentale est associée à un arbre couvrant. À partir de l'ensemble des cycles élémentaires, il nous faut donc trouver l'arbre couvrant de taille minimale. D'après [Syslo, 1981], ce problème est de classe \overline{NP} (on trouvera une excellente introduction à la notion de NP-complétude dans [Wolper, 2006]).

Cependant, dans notre cas particulier, il est possible de résoudre ce problème. En effet, nous cherchons les polygones qui ne sont pas composés d'autres polygones. Le fait qu'il s'agit de polygones nous donne une information supplémentaire : les coordonnées des sommets de chaque polygone, de sorte qu'il est possible de déterminer si un point est à l'intérieur, sur une arête, confondu avec un sommet du polygone ou à l'extérieur du polygone. [O'Rourke, 1998] donne un algorithme dédié à cette tâche, l'algorithme A.8. Pour s le nombre de sommets du polygone, la complexité de cet algorithme en temps et en espace est $O(s)$.

Dans l'algorithme A.8, pour P un polygone, $P(i)$ est le $i^{\text{ème}}$ point du polygone. Pour un point P , (P_x, P_y) sont ses coordonnées. \nleftrightarrow est l'opérateur logique de discordance (opérateur « différent de »), \vee l'opérateur d'union logique (opérateur « ou ») et \wedge l'opérateur d'intersection logique (opérateur « et »), voir par exemple [Cori et Lascar, 2004].

En exécutant l'algorithme A.7, on obtient l'ensemble des cycles élémentaires, donc l'ensemble des polygones que comporte la figure donnée. Munie de cette information, chercher tous les polygones qui ne sont composés d'aucun autre signifie chercher les polygones de l'ensemble donné qui n'en contiennent aucun autre. C'est-à-dire que pour

Algorithme A.8 Indique la position d'un point q par rapport à un polygone P

ENTRÉES : q contient les coordonnées du point à tester et P un tableau contenant les sommets du polygone, classés par ordre de succession

SORTIES : la position relative de q Par rapport à P

```

 $n \leftarrow \text{taille}(P)$ 
 $(\text{intersecteDroite}, \text{intersecteGauche}) \in \mathbb{N}^2$ 
 $P_1$  et  $P_2$  sont deux points
 $x \in \mathbb{R}$ 
 $(\text{chevauchementDroit}, \text{chevauchementGauche}) \in \mathbb{B}^2$ 

 $\text{intersecteDroite} \leftarrow 0$ 
 $\text{intersecteGauche} \leftarrow 0$ 
pour  $i$  variant de 1 à  $n$  par pas de 1 faire
     $P_1 \leftarrow P(i) - q$ 
    si  $P_1 = 0$  alors
        retourner  $q$  est un sommet de  $P$ 
    fin si
     $i_1 \leftarrow (i + n - 1 \bmod n)$ 
     $P_2 \leftarrow P(i_1) - q$ 
     $\text{chevauchementDroit} \leftarrow (P_{1,y} > 0) \nleftrightarrow (P_{2,y} > 0)$ 
     $\text{chevauchementGauche} \leftarrow (P_{1,y} < 0) \nleftrightarrow (P_{2,y} < 0)$ 
    si  $\text{chevauchementDroit} \vee \text{chevauchementGauche}$  alors
         $x \leftarrow \frac{P_{1,x} \cdot P_{2,y} - P_{2,x} \cdot P_{1,y}}{P_{2,y} - P_{1,y}}$ 
        si  $\text{chevauchementDroit} \wedge (x > 0)$  alors
             $\text{intersecteDroite} \leftarrow \text{intersecteDroite} + 1$ 
        fin si
        si  $\text{chevauchementGauche} \wedge (x < 0)$  alors
             $\text{intersecteGauche} \leftarrow \text{intersecteGauche} + 1$ 
        fin si
    fin si
fin pour
si  $(\text{intersecteDroite} \neq \text{intersecteGauche}) \bmod 2$  alors
    retourner  $q$  est sur une arête de  $P$ 
fin si
si  $\text{intersecteDroite} = 1 \bmod 2$  alors
    retourner  $q$  est strictement à l'intérieur de  $P$ 
sinon
    retourner  $q$  est strictement à l'extérieur de  $P$ 
fin si

```

chaque polygone, il faut vérifier que les autres polygones ont tous au moins un sommet à l'extérieur du polygone testé à l'aide de l'algorithme A.8. Si on en trouve au moins un pour lequel ce n'est pas le cas, cela signifie qu'il faut rejeter le polygone testé.

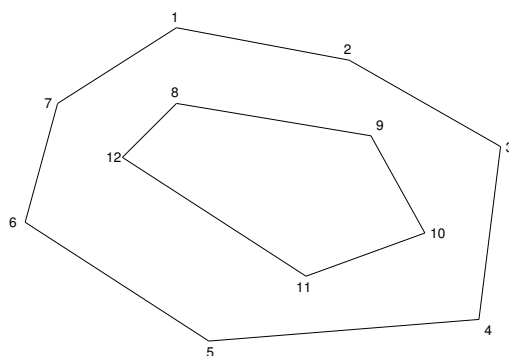


FIGURE A.2 – *Cas d'un polygone strictement inclu dans un autre*

Il y a une petite limitation dans notre cas : tous nos polygones sont simplement connexes, c'est-à-dire homéomorphes au disque et non pas au tore, de sorte que dans les cas semblables à celui de la figure A.2, nous ne disposons pas du polygone (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12) mais seulement des polygones (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) et (8, 9, 10, 11, 12). Dans ce cas, il faut conserver les deux polygones. Cela nécessite de très légèrement compliquer le critère : on teste chaque polygone avec les autres, si jamais au moins l'un de ces autres polygones n'a aucun point à l'extérieur du polygone testé, qu'il a au moins un point strictement à l'intérieur et qu'au moins l'un de ses sommets est aussi sommet du polygone testé, il faut rejeter le polygone testé. Cela entraîne une ambiguïté pour savoir à quel polygone appartient un point situé à l'intérieur d'un polygone contenu dans un autre, comme dans l'exemple de la figure A.2. Je donne une méthode très simple pour lever cette ambiguïté dans la section A.2. Cela nous mène à l'algorithme A.9.

Notons que l'algorithme A.9 supprime les doublons. Ceci n'a aucune incidence dans notre cas, car l'algorithme A.7 ne renvoie pas de cycle en double. Toutefois, c'est une propriété qui pourrait avoir une importance si l'algorithme A.9 devait être utilisé dans un autre contexte.

Cependant, l'algorithme A.9 ne couvre pas certains cas particuliers. La figure A.3 présente un cas où l'algorithme échoue. La figure A.3a montre un exemple de partitionnement du Golfe Persique, tandis les figures A.3b à A.3h présentent les sept polygones que l'algorithme en a extraits. Ces polygones laissent des ambiguïtés. Dans un premier temps, nous les avons levées en comparant les aires couvertes par les polygones. Toutefois, ce critère peut s'avérer délicat. Dans un deuxième temps, un nouvel algorithme sera proposé, basé sur la recherche d'un plongement du graphe obtenu en entrée. Il n'est pas détaillé ici, car il est encore en cours d'élaboration au moment de la rédaction de cette thèse.

Algorithme A.9 Algorithme sélectionnant les polygones à conserver

ENTRÉES : S est l'ensemble des polygones

SORTIES : la base fondamentale minimale de S
 $suspect \in \mathbb{B}$
 $B \leftarrow S$
pour tout $polygoneTeste \in S$ **faire**
pour tout $polygone \in S \setminus \{polygoneTeste\}$ **faire**
 $suspect \leftarrow \text{vrai}$
pour tout p point de $polygone$ **faire**
si p strictement à l'extérieur de $polygoneTeste$ **alors**
 $suspect \leftarrow \text{faux}$
fin si
fin pour
si $suspect$ **alors**
 $suspect \leftarrow \text{faux}$
pour tout p point de $polygone$ **faire**
si p est un sommet de $polygoneTeste$ **alors**
 $suspect \leftarrow \text{vrai}$
fin si
fin pour
si $suspect$ **alors**
 $suspect \leftarrow \text{faux}$
pour tout p point de $polygone$ **faire**
si p strictement à l'intérieur de $polygoneTeste$ **alors**
 $suspect \leftarrow \text{vrai}$
fin si
fin pour
fin si
si $suspect$ **alors**

supprimer $polygone$ de B
fin si
fin si
fin pour
fin pour
retourner B

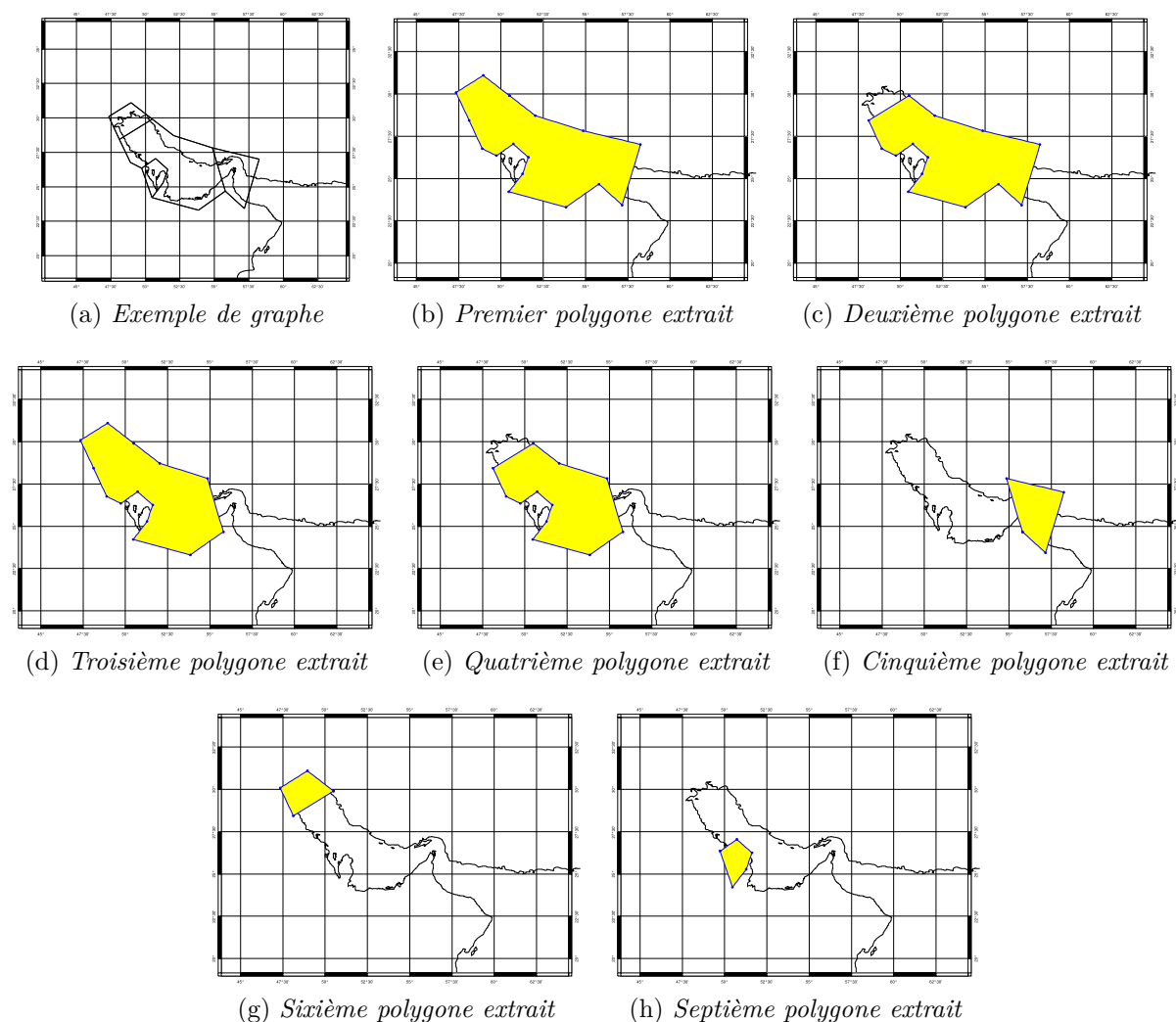
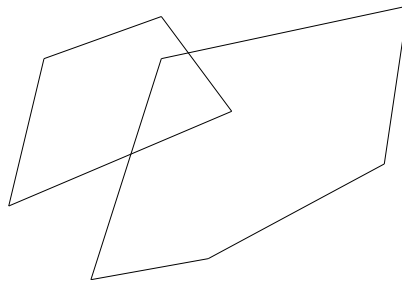
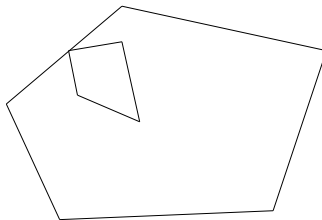


FIGURE A.3 – Un exemple d'échec de l'algorithme

Notons également que dans le cas où deux polygones se chevauchent, comme dans l'exemple de la figure A.4, l'algorithme conservera les deux. Nous atteignons là la limite qu'il y a à assimiler les polygones à des cycles : en effet, dans ce cas, il y a trois polygones à conserver : l'intersection des deux ainsi que l'un privé de l'autre et inversement. [O'Rourke, 1998] fournit un algorithme permettant de savoir si deux polygones s'intersectent, ainsi qu'un algorithme permettant de déterminer le point d'intersection de deux segments (à savoir ceux des arêtes qui se coupent). Il est donc possible d'obtenir l'ensemble des points composants deux polygones se chevauchant, ainsi que l'ensemble des segments associés. En appliquant l'algorithme de recherche de polygones à ces données, on obtient les polygones recherchés. Dans notre cas particulier, les polygones sont générés par un outil de maillage. En conséquence, il s'agit de maillages dégénérés, de sorte que l'on est certain qu'il n'y a pas de chevauchement (le graphe est nécessairement planaire).

FIGURE A.4 – *Cas où deux polygones se chevauchent*

De même, dans le cas où un polygone est inclus dans un autre et où l'un de ses sommets au moins est un point d'une arête du polygone dans lequel il est inclus sans toutefois être un sommet de ce polygone, comme dans le cas de la figure A.5, l'algorithme conserve les deux polygones. Ce comportement est souhaitable dans le cadre des cartes de rugosités, ce cas ayant un sens physique. Il y a la même ambiguïté que dans le cas de la figure A.2, qui est levée de la même manière.

FIGURE A.5 – *Cas où un sommet d'un polygone contenu dans un autre touche la frontière mais pas un sommet*

Nous avons la proposition suivante :

Proposition A.1.4. *La complexité en espace de l'algorithme A.9 est $\Theta(N)$.*

Démonstration. L'algorithme stocke une fois les polygones détectés (dans l'ensemble S) et une fois les polygones constituant la base fondamentale minimale de l'ensemble S . \square

Modifier l'algorithme pour qu'il détruise l'ensemble S , ne conservant que l'ensemble B est trivial.

Enfin, soit P le nombre de polygones et S le nombre moyen de sommets des polygones, nous avons la proposition suivante :

Proposition A.1.5. *La complexité en temps de l'algorithme A.9 est $\Theta(P^2 \times S)$.*

Démonstration. La première boucle de l'algorithme A.9 parcourt l'ensemble des polygones. La boucle imbriquée dans celle-ci refait une deuxième fois ce parcours. Enfin, la dernière boucle parcourt l'ensemble des sommets de chaque polygone et est imbriquée dans les deux précédentes. \square

La combinaison de tous ces algorithmes donne un algorithme qui, à partir d'un ensemble de sommets et de segments qui leurs sont associés, renvoie la base élémentaire minimale des polygones ainsi définis avec une complexité en temps de $O(N + C \times M + P^2 \times S)$ et en espace de $O(N + M)$.

A.2 Fixer le paramètre de rugosité

Nous disposons donc d'un moyen de retrouver les différentes zones définies par l'utilisateur. Il faut maintenant déterminer quelle est la valeur de z_0 dans chacune de ces zones. L'utilisateur fournit pour une série de points de références la valeur de z_0 . Fondamentalement, il suffit donc, pour chaque point de référence, de déterminer dans quel polygone il se trouve et d'attribuer à la zone délimitée par ce polygone la valeur de z_0 au point de référence. C'est ici que l'ambiguïté dont nous avons parlé précédemment doit être levée. En effet, si un point de référence appartient simultanément à plusieurs polygones, d'après ce qui précède, nous sommes alors soit dans le cas de la figure A.2, soit dans celui de la figure A.5. Le point appartient alors nécessairement au polygone le plus intérieur. Un moyen très simple de lever cette ambiguïté est donc de parcourir les polygones dans l'ordre de leurs aires décroissantes, ce qui fait que le dernier polygone que l'on trouvera comme contenant le point sera bien celui que nous recherchons.

Le tri est un problème réglé, on utilisera par exemple le tri rapide (voir [Knuth, 1998]). [O'Rourke, 1998] donne un algorithme permettant de calculer le double de l'aire d'un polygone quelconque avec, pour s le nombre de sommet du polygone, un coût en temps de $\Theta(s)$ et en espace de $\Theta(s)$. Dans la mesure où cela ne changera pas l'ordre des polygones, afin de limiter les erreurs d'arrondis, on ne divisera pas ces aires par 2. Cet algorithme utilise l'algorithme A.10, qui calcule le double de l'aire d'un triangle défini par trois points quelconques. Pour un point p quelconque dans un espace à deux dimensions, p_x est son abscisse et p_y son ordonnée.

Algorithme A.10 Fonction aireTriangle2

ENTRÉES : a , b et c trois points

SORTIES : l'aire du triangle associé à ces trois points

retourner $(b_x - a_x) \cdot (c_y - a_y) - (c_x - a_x) \cdot (b_y - a_y)$

L'algorithme A.11 calcule le double de l'aire d'un polygone quelconque.

[O'Rourke, 1998] n'indique pas de retourner la valeur absolue, mais par contre demande que les sommets soient parcourus dans le sens direct. Cela permet, pour les

Algorithme A.11 Calcule le double de l'aire d'un polygone quelconque

ENTRÉES : P est l'ensemble des sommets du polygone

SORTIES : l'aire du polygone

$somme \in \mathbb{R}$

$p \in \mathbb{R}^2$

$somme \leftarrow 0$

$p \leftarrow$ premier sommet de P

pour tout $a \in P \setminus \{p\}$ **faire**

$somme \leftarrow somme + \text{aireTriangle2}(p, a, \text{suivant}(a))$

$a \leftarrow \text{suivant}(a)$

fin pour

retourner $|somme|$

polygones qui ne sont pas convexes, de soustraire à l'enveloppe convexe les zones n'appartenant pas au polygone. En faisant le calcul sur des valeurs relatives puis en renvoyant la valeur absolue de l'aire calculée, on obtient le même effet sans nécessiter d'orienter le parcours des sommets.

Une fois l'ensemble des polygones trié dans l'ordre des aires décroissantes, l'algorithme A.12 permet de déterminer la valeur de z_0 dans chacun d'entre eux. Si aucune valeur n'est définie, une valeur par défaut est utilisée ($2 \cdot 10^{-3}$ dans la littérature).

Après avoir effectué ces étapes, pour déterminer la valeur de z_0 en tout point du maillage, on parcourt l'ensemble des polygones toujours dans l'ordre des aires décroissantes et on prend la valeur du dernier polygone dans lequel le point se trouvait.

A.3 Utilisation dans T-UGOm

Voici comment utiliser concrètement la localisation de z_0 dans T-UGOm.

L'utilisateur peut créer des zones géographiques dans lesquelles il fixera la valeur du coefficient de rugosité (z_0). Pour ce faire, il faut fournir deux fichiers.

Le premier fichier doit contenir un descriptif de chacune des zones géographiques dans lesquelles on veut prescrire z_0 . Cette description se fait sous la forme de polygones. Les polygones doivent être enregistrés sous le même format que les maillages qu'utilise T-UGOm (« nei »). La figure A.6 donne un exemple d'ensemble de polygones.

Le second fichier est un simple fichier ASCII. Il doit contenir un ensemble de points de références pour le coefficient de rugosité. Sur chaque ligne, il faut indiquer d'abord la longitude, ensuite la latitude et enfin la valeur du coefficient de frottement en ce point. Voici un exemple de fichier de références :

Algorithme A.12 Détermine la valeur de z_0 dans chacune des zones

ENTRÉES : S l'ensemble des zones définies par des polygones, v l'ensemble des sommets de références et z_0 l'ensemble des valeurs de z_0 qui leur sont associés

SORTIES : la valeur de z_0 est fixée pour tout les polygones

$n \leftarrow$ nombre de sommets dans v

p est un polygone

pour tout $q \in P$ **faire**

 fixer la valeur de z_0 dans q à la valeur par défaut

fin pour

pour i **variant de** 1 **à** n **par pas de** 1 **faire**

pour tout $q \in S$ **faire**

si $v(i) \in q$ **alors**

$p \leftarrow q$

fin si

fin pour

 fixer la valeur de z_0 dans p à $z_0(i)$

fin pour

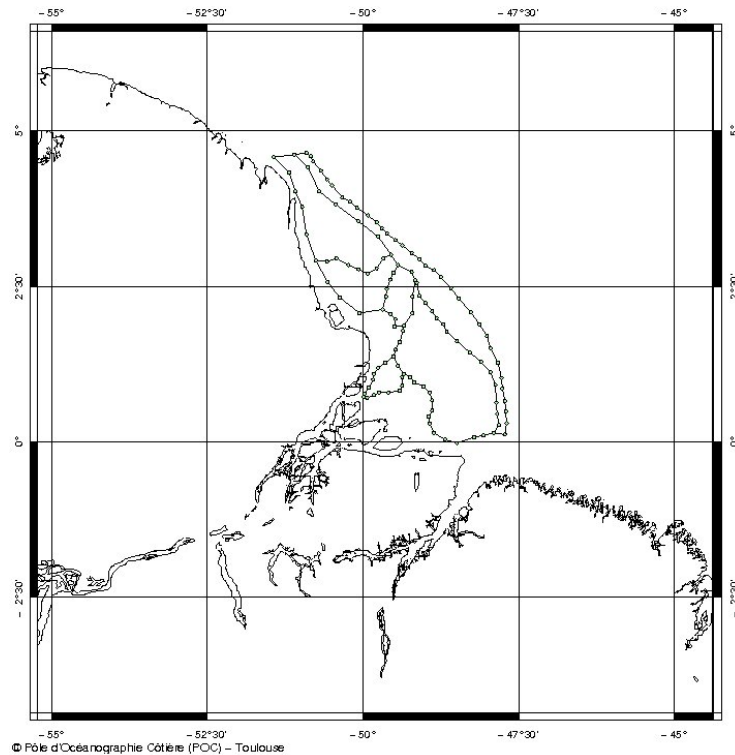


FIGURE A.6 – *Exemple d'ensemble de polygones valable*

-50.514553 3.4096332 0.009
 -49.456573 3.1142113 0.007
 -49.769367 2.5785582 0.02
 -49.401375 2.393792 0.01
 -48.729786 1.2107956 0.02
 -49.65897 0.9796652 0.05

Les valeurs de z_0 dans les polygones auxquels appartiennent chacun des points de références seront celles qui leurs sont associées.

Pour utiliser cette fonctionnalité, dans l'interface graphique de configuration du modèle, dans l'onglet « **dissipation** » il faut sélectionner, pour le champ « **bottom_friction_type** », le type « **KARMAN** ». Toujours dans cet onglet, dans le champ « **rugosity_polygons** », il faut entrer le chemin d'accès au fichier contenant la description des polygones et, dans le champ « **rugosity_values** », le chemin d'accès au fichier contenant les points de référence pour la valeur du coefficient de frottement de fond. Les points du maillage situés en dehors de tout polygone ou dans des polygones n'ayant pas de point de référence associé se verront attribuer comme valeur pour z_0 la valeur contenue dans le champ « **karman_rugosity** ». La figure A.7 donne un exemple de configuration.

Parameters	Values	Summary
background_velocity_file	= <default> NONE	KARMAN
bottom_friction_type	= KARMAN	
bottom_rugosity_file	= <default> NONE	
linear_friction_coeff	= <default> 2.5e-3	
quadratic_friction_coeff	= <default> 2.5e-3	
karman_rugosity	= 1.0e-4	
bottom_coeff_file	= <default> NONE	
rugosity_polygones	= /home/utilisateur/polygones.net	
rugosity_values	= /home/utilisateur/references	
internal_drag_slope	= <default> 0.00	
internal_drag_rugosity	= <default> 0.00	
mixed_layer_coeff	= <default> 0.00	
min_background_speed	= <default> 0.05	
horizontal_viscosity_mode	= <default> SMAGORINSKY	
min_horizontal_viscosity	= <default> 1.00	FALSE
brunt_vassalla_value	= <default> 0.002	
brunt_vassalla_file	= <default> NONE	
shear_drag_flag	= <default> FALSE	FALSE

FIGURE A.7 – Configuration de T-UGOm

Si l'utilisateur préfère ne pas avoir recours à l'interface graphique de T-UGOm, dans le fichier de configuration, dans la section « **dissipation** », il lui faut renseigner les

champs « `bottom_friction_type` », « `rugosity_polygons` » et « `rugosity_values` » de la même manière qu'indiqué ci-dessus au niveau de l'interface graphique. Le champ « `karman_rugosity` » servira de valeur par défaut.

A.4 Conclusion partielle

En nous basant sur la théorie de graphes, nous avons pu créer un algorithme permettant de discriminer des zones géographiques. Nous l'avons appliqué au cas particulier de la friction de fond, car il nous a permis de prendre en compte la variabilité géographique de la friction de fond dans l'estuaire de l'Amazone (voir chapitre 3).

Annexe B

Notes d'implémentation

Une grande partie de cette thèse a consisté en l'implémentation informatique de méthodes numériques et d'algorithmes. Cet annexe donne quelques éléments pratiques concernant les choix d'implémentations et la structure du code.

Sommaire

B.1	Généralités	165
B.2	Gestion des erreurs	167
B.3	Coefficient logarithmique	168
B.4	Cartes de rugosités	169

B.1 Généralités

Autant que possible, les développements de cette thèse ont été effectués selon une approche orientée objets et fonctionnelle. L'approche orientée objets est bien supportée par C++, mais il en supporte également d'autres. À l'inverse, pour utiliser les éléments avancés de l'approche fonctionnelle, par exemple les fonctions de l'ordre supérieur, il faut avoir recours à la bibliothèque standard (en-tête « `<functional>` »), voire à une bibliothèque tierce telle que Boost¹. Cependant, les éléments de programmation fonctionnelle utiles pour les développements effectués dans le cadre de cette thèse sont la récursivité et la composition de fonctions, tous deux parfaitement supportés de base par C++.

Également, il est préférable d'éviter de faire du C compilé par un compilateur C++. En effet, cela entraîne à passer à côté de certains éléments clefs du C++ et, surtout, à produire souvent un code moins efficace. De même, C++ considère la déclaration de variables comme une instruction, ce qui permet d'initialiser les variables en même temps que leur déclaration, donc d'éviter d'avoir des variables sans valeur significatives, source de bogues difficilement détectables. De plus, venant s'insérer dans un code de grande taille sur lequel plusieurs programmeurs ont travaillé, l'utilisation de noms de variables déjà utilisés par ailleurs est inéluctable. La possibilité, induite par le fait de considérer la déclaration comme une instruction, de déclarer en n'importe quel point du code les noms de variables permet d'en réduire la portée et donc de minimiser les risques de collision de noms. Réduire la portée des variables permet également d'éviter d'avoir des variables non significatives et cependant utilisables dans le code, également source d'erreurs complexes. C'est également pour ces raisons que les espaces de nommage (« **namespace** ») ont été utilisés.

Enfin, il est préférable de bannir les variables globales (le passage de variables par références permet de manière simple et efficace d'en supprimer toute utilité), la gestion de la mémoire de type C (« `malloc` » et « `free` ») et les conversions de type C, sources de beaucoup trop d'erreurs problématiques. À l'inverse, il ne faut pas utiliser à faire une utilisation massive la bibliothèque standard, qui nécessite certes un apprentissage, mais qui est efficace et qui propose de nombreuses fonctionnalités utiles, ce qui permet de gagner du temps de développement, de limiter le nombre de bogue et d'obtenir un code performant.

Le choix des noms est délicat, tout particulièrement en C++, qui peut être très bavard et, si des noms de variables peu explicites nuisent à la lecture, c'est aussi le cas des noms trop longs. Dans les codes produits pendant cette thèse, les noms de type, de classe ou d'espace de nommage commencent par une majuscule, les instances (les variables) commençant par une minuscule. Également, les noms de variables sont autant que possible les mêmes dans le code que dans les algorithmes et les traitements théoriques. Le projet impliquant des développeurs de divers pays, l'ensemble du code source est en anglais.

Tous les en-têtes sont protégés de la façon classique :

```
#ifndef NOM_FICHIER_SOURCE
```

1. <http://www.boost.org/>

```
#define NOM_FICHIER_SOURCE
```

```
/* Ici le code source */
```

```
#endif // #ifndef NOM_FICHIER_SOURCE
```

Dès l'or, l'en-tête peut être inclut dans n'importe quel fichier sans le moindre risque de définition redondante. De plus, les fichiers sources incluent tous les en-têtes qui leurs correspondent, afin d'être sûr que les prototypes sont bons. C'est la technique employée, entre autre, dans la bibliothèque standard.

Une grande partie du code réalisé pendant cette thèse est générique, c'est-à-dire qu'il ne porte pas sur un type particulier (utilisation du mot clef « **template** »). Le code *ad hoc* est créé par le compilateur en fonction des appels rencontrés. Dans certains cas, il peut y avoir des conflits, car différentes unités de compilations peuvent créer la même spécialisation du code. Le mot clef « **static** » permet d'éviter ce problème, en indiquant que le code est spécifique à son unité de compilation.

On trouvera dans le fichier « **constants.h** » l'ensemble des constantes utilisées dans le code.

Les spécificités de C ont imposé une organisation du code où une unité de compilation est décomposée en deux fichiers, un en-tête comportant les prototypes des procédures et fonctions et un fichier source contenant le corps de ces fonctions. Il s'agit d'une organisation assez rigide, qui peut ne pas refléter la structure interne d'un programme. L'introduction du code générique dans C++ pousse à rassembler une grande partie des procédures et fonctions dans les en-têtes et à repenser l'organisation des sources d'un programme pour en refléter la logique interne. L'organisation du code produit pendant cette thèse est entre ces deux modèles.

Enfin, pour faciliter la compréhension du code, nous avons recourt au logiciel de documentation automatique Doxygen².

Dans le cas des automates produits pendant cette thèse, la documentation se trouve à chaque fois dans le répertoire « **doc** », au format HTML (sous-répertoire « **html** »), PDF (sous-répertoire « **latex** ») et *man page* (sous-répertoire « **man** »). Pour générer la documentation au format PDF, une fois dans le sous-répertoire « **latex** », exécuter la commande « **make** ». La construction des automates se fait à l'aide de l'outil Scons³. À chaque fois, le fichier « **README** » dans le répertoire racine donne la méthode pour compiler le code.

On trouvera l'ensemble des fonctionnalités de C++, une description complète de la bibliothèque standard ainsi que des considérations sur les choix d'implémentations dans [Stroustrup, 2003].

2. <http://www.stack.nl/~dimitri/doxygen/>

3. <http://www.scons.org/>

B.2 Gestion des erreurs

La gestion des erreurs est un processus nécessairement complexe et qui peut rendre un code difficilement lisible et peu efficace. C++ fournit deux mécanismes pour faciliter cette gestion. Le plus simple est le mécanisme d'assertion (hérité de C) : l'en-tête « `<cassert>` » fournit la fonction « `assert.` » Cette fonction prend en argument une expression logique. Si jamais l'expression n'est pas vérifiée, elle met fin au programme, en délivrant un message d'erreur indiquant quelle assertion n'est pas vérifiée et à quel niveau du programme cela c'est déroulé. En utilisant l'option de compilation « `--DNDEBUG` » ou la directive de pré-processeur « `#define NDEBUG` », on désactive les assertions. Voici un exemple d'utilisation des assertions :

```
T &operator [] (size_t i) {
    std::assert(i < 2);
    switch (i) {
        case 0: return abs;
        case 1: return ord;
    }
}
// T &operator [] (size_t)
```

Le deuxième mécanisme est propre à C++ : il s'agit des exceptions. Une exception est un message transmis sous la forme d'une instance, qui peut être intercepté plus en aval dans le code. Si jamais une exception n'est pas interceptée, elle provoque l'arrêt du programme avec un message d'erreur indiquant quelle exception a été déclenchée sans être interceptée. Voici un exemple de déclenchement d'exception :

```
if ((pos == vertex) || (pos == edge))
    throw OnBoundaryPoint (v[i].x(), v[i].y(), i);
```

Et un exemple d'interception d'exceptions :

```
try { // try block: error gestion in file reading
    /* Read the polygons in file polygonsFileName, the reference
       point in pointsFileName and set z0 in mesh */
    const vector<double> vz0 =
        Polygons::initialisez0<double, double>(polygonsFileName,
                                                pointsFileName,
                                                mesh, defaultZ0);

    for (size_t i = 0; i < vz0.size(); i++)
        data[0][i].z0 = vz0[i];
}
/* Part of the code executed if a problem occur during file
   reading */
catch (TugoExceptions::ReadError file) {
    string errorMessage = "An error occure when reading the file "
        + file.fileName();
    check_error(-2, errorMessage.c_str(), __LINE__, __FILE__, 1);
}
```

```

}
/* Part of the code executed if a reference point is on the
   boundary of a polygon */
catch (TugoExceptions::OnBoundaryPoint point) {
    string errorMessage = "The reference point n" + point.ind();
    errorMessage += ", which coordinates are ";
    errorMessage += point.x();
    errorMessage += ", ";
    errorMessage += point.y();
    errorMessage += ") is on the boundary of a polygon.";
    check_error(-3, errorMessage.c_str(), __LINE__, __FILE__, 1);
}
/* Part of the code executed if trying to use a negative or
   null value for z0 */
catch (TugoExceptions::Negative) {
    check_error(-4, "Trying to use a negative value for z0.",
                __LINE__, __FILE__, 1);
}

```

Pour le cas des erreurs relevant purement d'un problème de programmation, j'ai opté pour utiliser les assertions. Ainsi, une fois le programme totalement validé, on peut en produire une version plus performante en désactivant les assertions, qui n'ont alors plus lieux d'être. En revanche, les erreurs dues à des données incohérentes pourront se produire tout au long de la durée de vie du programme et nécessiteront une gestion fine. Pour gérer de telles erreurs, j'ai privilégié les exceptions.

Le fichier « `exceptions.hpp` » encapsule toutes les exceptions dans l'espace de nommage « `TugoExceptions.` »

B.3 Coefficient de frottement pour un profil de vitesse logarithmique

L'implémentation du coefficient de rugosité discuté chapitre 3 se trouve dans le fichier « `drag-additional.cpp` ». Le fichier « `drag.hpp` » lui fait référence et il est appelé dans « `drag.cpp` ». Globalement, « `drag.cpp` » traite le cas des profils de vitesses linéaires et quadratiques, « `drag-additional.cpp` » traitant le cas d'un profil de vitesse logarithmique.

Dans ces fichiers, ce n'est pas exactement τ_b qui est calculé. En effet, sa définition exacte est $\tau_b = \rho C_D \|\bar{\mathbf{u}}\| \bar{\mathbf{u}}$ mais ce qui est calculé à ce niveau est $\tau_b = C_D \|\bar{\mathbf{u}}\|/H$, les ajustements étant faits en aval dans le code.

B.4 Cartes de rugosités

L'implémentation de l'algorithme présenté dans l'annexe A se trouve dans les fichiers « `polygons.hpp` » et « `polygons_implementation.hpp` ».

L'objectif étant d'obtenir un code polyvalent, j'y ai utilisé de manière intensive les modèles (« `template` »). Ceci ne complique pas vraiment le code source, par contre les prototypes des fonctions deviennent plus longs.

Le fichier « `polygons-exceptions.hpp` » regroupe toutes les exceptions qui peuvent être déclanchées pendant la recherche de polygones.

Le code suit complètement l'algorithme de l'annexe A. Les nouveautés tiennent dans les structures de données. J'ai créé plusieurs types et classe d'objets, tous regroupés dans l'espace de nommage « `Polygons` » :

- le type « `Adjacence` » représente une liste d'indices, qui sont les points auxquels le point de référence est raccordé par une arête. Il s'utilise de la même manière que « `list` » de la bibliothèque standard ;
- le type « `Position` » représente une position relative d'un point par rapport à un polygone et peut prendre les valeurs « `in` » (lorsque le point est strictement à l'intérieur du polygone), « `edge` » (lorsque le point est strictement sur une arête du polygone), « `vertex` » (lorsque le point est un sommet du polygone) ou « `out` » (lorsque le point est strictement à l'extérieur du polygone) ;
- la classe « `point` » sert à représenter un point dans un espace à deux dimensions. On accède à son abscisse et son ordonnée par l'intermédiaire des fonctions membres « `x()` » et « `y()` » (il est alors possible d'en modifier la valeur). Cet accès peut aussi se faire comme pour un tableau, « `[0]` » représentant l'abscisse et « `[1]` » l'ordonnée. Sont également surchargés les opérateurs « `=` », « `==` », « `!=` » et « `-` ». Elle possède un constructeur à partir de deux valeurs (abscisse et ordonnée), un constructeur par défaut et un constructeur par copie ;
- la classe « `Element` » représente un sommet d'un graphe, elle contient donc un point et une liste d'adjacence. Les fonctions membres « `coordinate()` » et « `adjacence()` » renvoient respectivement les coordonnées de l'élément sous la forme d'une classe « `Point` » et la liste des adjacences (la modification est alors possible). L'opérateur « `=` » est surchargé. Elle possède un constructeur à partir d'un « `Point` » et d'une liste d'adjacences, un constructeur par défaut et un constructeur par copie ;
- la classe « `Graph` » représente un graphe. Fondamentalement, c'est un tableau d'éléments, elle hérite donc de la classe « `vector` » de la bibliothèque standard et s'utilise de la même manière ;
- la classe « `Polygon` » représente un polygone. C'est un tableau de point, elle hérite donc de la classe « `vector` ». Elle contient également la valeur de z_0 associée au polygone. D'autre part, le calcul de l'aire d'un polygone étant relativement coûteuse, l'idée est de ne la calculer que lorsqu'elle est nécessaire et d'en conserver la valeur tant que le polygone n'est pas modifié. Nous avons donc là typiquement l'exemple d'une classe qui peut être logiquement constante, mais dans les faits variable, d'où l'emploi de « `mutable` » (voir [Stroustrup, 2003]). Héritant de « `vector` », elle s'utilise de la même manière. De plus, la fonction membre « `z0()` » donne la valeur de z_0

associée au polygone, tandis que « `setz0(z0)` » en fixe la valeur. Enfin, les fonctions membres « `where(p)` » et « `area2()` » donnent la position relative du point « `p` » par rapport au polygone et le double de l'aire du polygone. J'ai surchargé l'opérateur « `==` », ainsi que « `<` », « `<=` », « `>` » et « `>=` », ces derniers se basant sur l'aire des polygones. La classe est dotée d'un constructeur prenant un vecteur de « `Point` » et une valeur de z_0 , un constructeur par défaut et un constructeur par copie ;

- la classe « `ReferencePoint` » hérite de la classe « `Point` » et lui ajoute un champ pour stocker z_0 . Les fonctions membres « `setz0(z0)` » et « `z0()` » permettent respectivement de fixer la valeur de z_0 et d'y accéder ;
- enfin, la classe « `PolygonSet` » permet de stocker l'ensemble des polygones. Elle hérite de la classe « `list` » et peut donc être utilisée de la même manière. En particulier, elle dispose donc de la fonction membre « `sort` », qui permet de la trier. Cette classe ajoute un champ pour stocker la valeur par défaut de z_0 dans l'ensemble de polygones ainsi représenté. Les fonctions membres « `setDefaultz0(defaultz0)` » et « `defaultz0()` » permettent respectivement de fixer cette valeur par défaut et d'y accéder. La procédure membre « `setz0(v)` » détermine la valeur de z_0 dans chaque polygone à partir d'un vecteur de points de références. Si jamais l'un des points de référence est sur une arête ou un sommet d'un polygone, le programme envoie une exception. Enfin, la fonction membre « `determinez0(mesh)` » renvoie un vecteur contenant la valeur de z_0 en chaque point du maillage. Les points situés sur des sommets ou des arêtes des polygones sont considérés comme appartenant au polygone le plus intérieur.

Pour utiliser les fonctionnalités proposées par ce code, si le nom du fichier contenant la description des polygones est stocké dans la chaîne de caractères nommée « `polygonsFileName`, » le nom du fichier contenant la description des points est stocké dans la chaîne de caractères « `pointsFileName` » et le maillage dans la variable « `mesh` », il suffit d'utiliser le code suivant :

```
const vector<double> vz0 =
    Polygons::initialisez0(<double, double>(polygonsFileName ,
                                           pointsFileName ,
                                           mesh);
```

« `vz0` » contient alors les valeurs de z_0 pour chaque point du maillage, indicés comme dans « `mesh` ».

Cette partie du code peut lancer les exceptions suivantes – elles héritent toutes de la classe « `GraphError` », ce qui permet, au besoin, de les traiter de manière groupée :

- « `CapacityOverflow` », qui est déclenchée lorsque l'on cherche à stocker plus de polygones que ne peut en indexer la machine ;
- « `NullOrNegative` », qui est déclenchée lorsqu'une valeur pour z_0 est négative ou nulle ;
- « `ReadError` », qui est déclenchée lorsqu'une erreur se produit à la lecture d'un fichier. La méthode « `fileName()` » renvoie un « `string` » qui contient le nom du fichier qui a posé problème ;

- « OnBoundaryPoint », qui est déclenchée lorsqu'un point de référence est situé sur la frontière de polygones. La méthode « ind() » renvoie l'indice qui lui est associé, tandis que les méthodes « x() » et « y() » renvoient ses coordonnées.

Table des figures

1	<i>L'estuaire de l'Amazone</i>	4
2	<i>Rétroflexion du panache de l'Amazone</i>	5
3	<i>Le bassin amazonien</i>	6
4	<i>Vicente Yáñez PINZON</i>	7
5	<i>Alexander von Humboldt</i>	7
6	<i>Statue de Phythéas sur la façade du palais de la Bourse à Marseille</i> . . .	9
7	<i>Strabon, gravure du XVI^e siècle</i>	10
8	<i>Pline l'ancien</i>	10
9	<i>Portrait d'Isaac NEWTON par Godfrey KNELLER (1689)</i>	12
10	<i>Daniel BERNOULLI</i>	13
11	<i>Claude-Louis NAVIER</i>	14
12	<i>George STOKES</i>	14
13	<i>Pierre-Simon LAPLACE</i>	15
14	<i>Lord Kelvin</i>	16
15	<i>George DARWIN</i>	17
1.1	<i>Forces génératrices de la marée</i>	25
1.2	<i>Marée statique</i>	26
1.3	<i>Le système Terre-Lune</i>	27
1.4	<i>Circonvolution de la Terre autour du Soleil</i>	29
1.5	<i>Les deux types d'éléments disponibles</i>	42
1.6	<i>Deux triangles voisins</i>	44
2.1	<i>Base de données marégraphique de la Femar</i>	54
2.2	<i>Traces altimétriques dans la zone atlantique sud et celles utilisées dans cette étude (dans le cadre bleu)</i>	55
2.3	<i>Taux des données altimétriques acquises sur chaque trace (en %), superposé sur la bathymétrie (en m)</i>	56
2.4	<i>Comparaison entre la marée (en vert) et l'acquisition de données altimétriques (en noir)</i>	57

2.5	<i>Trajets et stations des quatre campagnes de mesures Amandes</i>	59
3.1	<i>Travail du frottement de fond (W m^{-2})</i>	86
3.2	<i>Flux d'énergie (W m^{-1})</i>	87
3.3	<i>Un exemple de profil de vitesse dans la couche turbulente</i>	89
3.4	<i>Profil de \mathbf{u} (en m s^{-1}) en fonction de z' (en m) avec $z_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $\ \bar{\mathbf{u}}\ = 10^{-1} \text{ m s}^{-1}$ et $H = 100 \text{ m}$</i>	90
3.5	<i>Profils de C_D en fonction de la hauteur d'eau (en m) pour $z_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ et $\bar{\mathbf{u}}$ valant 10^{-1} m s^{-1} (en rouge), $5 \cdot 10^{-1} \text{ m s}^{-1}$ (en vert) et 1 m s^{-1} (en bleu) dans le cas de la formulation de PEDLOSKY</i>	100
3.6	<i>Profils de C_D en fonction de la profondeur (en m), pour $z_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ et $\ \bar{\mathbf{u}}\$ valant 10^{-1} m s^{-1}, $5 \cdot 10^{-1} \text{ m s}^{-1}$ et 1 m s^{-1} dans le cas de la formulation de DOWDEN avec $k_N = 0, 10$</i>	106
4.1	<i>Onde M_2 obtenue avec la bathymétrie AB2</i>	128
4.2	<i>Onde K_1 obtenue avec la bathymétrie AB2</i>	129
4.3	<i>Onde S_2 obtenue avec la bathymétrie AB2</i>	130
4.4	<i>Onde M_4 obtenue avec la bathymétrie AB2</i>	131
A.1	<i>Exemple de graphe</i>	151
A.2	<i>Cas d'un polygone strictement inclu dans un autre</i>	153
A.3	<i>Un exemple d'échec de l'algorithme</i>	155
A.4	<i>Cas où deux polygones se chevauchent</i>	156
A.5	<i>Cas où un sommet d'un polygone contenu dans un autre touche la frontière mais pas un sommet</i>	156
A.6	<i>Exemple d'ensemble de polygones valable</i>	159
A.7	<i>Configuration de T-UGOm</i>	160

Liste des tableaux

3.1	<i>Erreur maximum commise sur H_e par l'approximation (précision : 10^{-10}), pour une profondeur de 0 m à 4000 m dans le cas de la formulation de PEDLOSKY</i>	99
3.2	<i>H_e en m en fonction de la latitude et de $\ \bar{\mathbf{u}}\$ pour $z_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ m dans le cas de la formulation de PEDLOSKY</i>	99
3.3	<i>Étude de la convergence de la méthode de NEWTON dans le cas de la formulation de PEDLOSKY</i>	102
3.4	<i>Erreur maximale commise sur H_c par l'approximation (précision : 10^{-10}), pour une profondeur comprise entre 0 m et 4000 m dans le cas de la formulation de DOWDEN avec $k_N = 0, 10$</i>	105
3.5	<i>Étude de la convergence de la méthode de NEWTON</i>	105
4.1	<i>Comparaison entre la solution et les données de validation – A indique l'amplitude, G la phase et $Z = Ae^{iG}$</i>	132

Liste des algorithmes

A.1	Procédure noncycle	145
A.2	Procédure démarquer	146
A.3	Fonction cycle	147
A.4	Recherche de l'ensemble des cycles élémentaires d'un digraphe	148
A.5	Fonction « recherche »	149
A.6	Recherche des composantes connexes et du nœud de plus haut degré . . .	149
A.7	Recherche de l'ensemble des cycles élémentaires	150
A.8	Indique la position d'un point q par rapport à un polygone P	152
A.9	Algorithme sélectionnant les polygones à conserver	154
A.10	Fonction aireTriangle2	157
A.11	Calcule le double de l'aire d'un polygone quelconque	158
A.12	Détermine la valeur de z_0 dans chacune des zones	159

Bibliographie

- [Abbott et Basco, 1994] M. B. ABBOTT et D. R. BASCO. *Computational Fluid Dynamics : An Introduction for Engineers*. Longman Scientific & Technical, Longman Group UK Limited, Longman House, Burnt Mill, Harlow Essex CM20 2JE, England, 1994.
- [Accad et Pekeris, 1964] Y. ACCAD et C. L. PEKERIS. The K_2 tide in ocean bounded by meridians and parallels. *Proc. R. Society, A*(278) : 110 – 128, 1964.
- [Accad et Pekeris, 1978] Y. ACCAD et C. L. PEKERIS. Solution of Laplace’s equations for M_2 and S_2 in the World Ocean from a knowledge of the tidal potential alone. *Phil. Trans. R. Soc.*, 290 : 235 – 266, 1978.
- [Amante et Barry, 2008] Christopher AMANTE et W. Eakins BARRY. ETOPO1 1 Arc-Minute Global Relief Model : Procedures, Data Sources and Analysis. Rapport Technique, NOAA/NGDC, août 2008. Version préliminaire : <ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/mgg/global/relief/ETOP01/docs/ETOP01.pdf>.
- [AmasSeds Group, 1990] AMASSEDS GROUP. A Multi-disciplinary Amazon Shelf Sediment Study (AMASSEDS). *Eos, Transactions, American Geophysical Union*, 45 : 1771 – 1777, 1990.
- [Barré de Saint-Venant, 1871] Adhémar-Jean-Claude Barré de SAINT-VENANT. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l’introduction des marées dans leur lit. *Comptes-rendus de l’Académie des sciences*, 73 : 147 – 154, 1871.
- [Baumert et al., 2005] Helmut Z. BAUMERT, John SIMPSON, et Jürgen SÜNDERMANN, éditeurs. *Marine turbulence : theories, observations, and models*. Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 2RU, United Kingdom, 2005.
- [Beardsley et al., 1995] Robert C. BEARDSLEY, Julio CANDELA, Richard LIMEBURNER, W. ROCKWELL GEYER, Steven J. LENTZ, Belmiro M. CASTRO, David CACCHIONE, et Nelson CARNEIRO. The M_2 tide on the Amazon shelf. *Journal of Geophysical Research*, 100(C2) : 2283 – 2319, février 1995.
- [Berge, 1983] Claude BERGE. *Graphes*. Gauthier-Villars, troisième édition, 1983.
- [Bernoulli, 1738] Daniel BERNOULLI. *Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum commentarii*. Johann Reinhold DULSECKER, Argentorati (Straßburg), Deutschland, 1738.
- [Blayo, 2000] Eric BLAYO. Compact finite difference schemes for ocean models, 1. ocean waves. *Journal of Computational Physics*, 164 : 241 – 257, novembre 2000.

- [Blayo et Debreu, 2005] Eric BLAYO et L. DEBREU. Revisiting open boundary conditions from the point of view of characteristic variables. *Ocean Modelling*, 9 : 231 – 252, 2005.
- [Bogdanov et Magarik, 1967] K. T. BOGDANOV et V. MAGARIK. Numerical solutions to the problem of distribution of semidiurnal tides M2 and S2 in the world oceans. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 172 : 1315 – 1317, 1967.
- [Brezis, 1999] Haïm BREZIS. *Analyse fonctionnelle*. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, Paris, France, 1999.
- [Brown, 1896] Ernest William BROWN. *An Introductory Treatise on Lunar Theory*. Cambridge University Press, 1896.
- [Callède *et al.*, 2002] Jacques CALLÈDE, Jean-Loup GUYOT, J. RONCHAIL, M. MOLINIER, et E. de OLIVERA. The River Amazon at Obidos (Brazil) : Statistical studies of the discharges and water balance. *Hydrological Sciences Journal*, 47(2) : 321 – 333, avril 2002.
- [Callède *et al.*, 2010] Jacques CALLÈDE, G. COCHONNEAU, J. RONCHAIL, F. VIEIRA ALVEZ, Jean-Loup GUYOT, V. SANTOS GUIMARÃES, et E. de OLIVEIRA. Les apports en eau de l'Amazonie à l'océan Atlantique. *Revue des sciences de l'eau*, 23(2), juin 2010.
- [Carrère, 2003] Loren CARRÈRE. *Étude et modélisation de la réponse haute fréquence de l'océan global aux forçages météorologiques*. Thèse de doctorat, Université Toulouse III – Paul SABATIER, 118, Route de Narbonne - F-31062 Toulouse cedex 9, France, novembre 2003.
- [Carrère et Lyard, 2003] Loren CARRÈRE et Florent LYARD. Modeling the barotropic response of the global ocean to atmospheric wind and pressure forcing – comparisons with observations. *Geophysical Research Letters*, 30(6) : 1275, mars 2003.
- [Carreteiro, 1987] Ronald P. CARRETEIRO. *A Navegação na Amazônia*. Calderaro, 1987.
- [Carter et Merrifield, 2007] Glenn S. CARTER et Mark A. MERRIFIELD. Open boundary conditions for regional tidal simulations. *Ocean Modelling*, 18 : 194 – 209, 2007.
- [Cartwright et Ray, 1991] David E. CARTWRIGHT et Richard D. RAY. Energetics of Global Ocean Tides From Geosat Altimetry. *Journal of Geophysical Research*, 96(C9), 1991.
- [Chassaing, 2000a] Patrick CHASSAING. *Mécanique des fluides, Éléments d'un premier parcours*. Collection POLYTECH. Cépaduès-Éditions, 111, rue Nicolas-Vauquelin, F31100 Toulouse, France, 2000.
- [Chassaing, 2000b] Patrick CHASSAING. *Turbulence en mécanique des fluides, Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur*. Collection POLYTECH. Cépaduès-Éditions, 111, rue Nicolas-Vauquelin, F31100 Toulouse, France, octobre 2000.
- [Chen *et al.*, 2003] Changsheng CHEN, Hedong LIU, et Robert C. BEARDSLEY. An Unstructured Grid, Finite-volume, Three-Dimensional, Primitive Equations Ocean Model : Application to Coastal Ocean and Estuaries. *Journal of atmospheric and oceanic technology*, 20 : 159 – 186, janvier 2003.

- [Christol *et al.*, 1997] Gilles CHRISTOL, Anne COT, et Charles-Michel MARLE. *Topologie*. Mathématiques pour le deuxième cycle. Ellipses Édition Marketing S.A., 32, rue Bague, 75740 Paris cedex 15, France, 1997.
- [Cori et Lascar, 2004] René CORI et Daniel LASCAR. *Logique mathématique*. Dunod, Paris, France, 2004. Deux volumes.
- [Cormen *et al.*, 2004] Thomas H. CORMEN, Charles E. LEISERSON, Ronald L. RIVEST, et Clifford STEIN. *Introduction à l'Algorithmique, Cours et exercices*. Dunod, Paris, France, deuxième édition, 2004.
- [Coron *et al.*, 2009] Jean-Michel CORON, Brigitte d'Andréa NOVEL, et Georges BASTIN. La formule qui permet de naviguer sur les canaux. *Les dossiers de La Recherche*, 37 : 38 – 39, novembre 2009.
- [Crouzeix et Mignot, 1989] Michel CROUZEIX et Alain L. MIGNOT. *Analyse numériques des équations différentielles*. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 120, boulevard Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06, France, deuxième édition, 1989.
- [Cushman-Roisin, 1994] Benoit CUSHMAN-ROISIN. *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, USA, 1994.
- [Cushman-Roisin et Malačič, 1997] Benoit CUSHMAN-ROISIN et Vlado MALAČIČ. Bottom Ekman Pumping with Stress-Dependent Eddy Viscosity. *Journal of Physical Oceanography*, 27 : 1967 – 1975, septembre 1997.
- [Danaila *et al.*, 2003] Ionut DANAILA, Frédéric HECHT, et Olivier PIRONNEAU. *Simulation numérique en C++, cours et exercice corrigés*. Dunod, Paris, France, 2003.
- [Darwin, 1883] George Howard DARWIN. *On the figure of equilibrium of a planet of heterogeneous density*. Harrison and Sons, Printers in Ordinary to Her Majesty, London, United Kingdom, 1883. Extrait de *Proceedings of the Royal Society*, N. 229, 1883.
- [de la Condamine, 1745] Charles-Marie de la CONDAMINE. Relation abrégée d'un voyage fait dans l'intérieur de l'Amérique méridionale, depuis la côte de la mer du Sud, jusqu'aux côtes du Brésil et de la Guyanne, en descendant la rivière des amazones. Dans *Histoire de l'Académie royale des sciences*, pages 391 – 492, Paris, France, avril 1745. Imprimerie royale.
- [Deo *et al.*, 1982] Narsingh DEO, G. M. PRABHU, et M. S. KRISHNAMOORTHY. Algorithms for generating fundamental cycles in a graph. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 8(1) : 26 – 42, mars 1982.
- [Doodson, 1921] Arthur Thomas DOODSON. The harmonic developpement of the tide-generating potential. *Proceedings of the Royal Society*, 100(A) : 305 – 329, 1921.
- [Doss-Bachelet *et al.*, 2000] Catherine DOSS-BACHELET, Jean-Pierre FRANÇOISE, et Claude PIQUET. *Géométrie différentielle : Avec 80 figures*. Mathématiques pour le deuxième cycle. Ellipses Édition Marketing, 32, rue Bague, 75740 Paris cedex 15, France, 2000.
- [Dowden, 1972] J. M. DOWDEN. An equatorial boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 56(2) : 193 – 200, 1972.
- [Dronkers, 1964] J. J. DRONKERS. *Tidal computations in rivers and coastal waters*. North-Holland Publishing Compagny, Amsterdam, 1964.

- [Emery et Thomson, 2001] William J. EMERY et Richard E. THOMSON. *Data analysis methods in physical oceanography*. Elsevier Science B.V., Sara Burgerhartstraat 25, P.O. Box 211, 1000 AE Amsterdam, The Netherlands, deuxième édition, 2001.
- [Euler, 1757] Leonhard Paul EULER. Principes généraux du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin*, 11 : 274 – 315, 1757.
- [Fefferman, 2000] Charles L. FEFFERMAN. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. Disponible en ligne à l'adresse : http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/navierstokes.pdf, 2000.
- [Femar, 2000] FEMAR. *Catalogo de estações maregráficas Brasileiras*. Fundação de Estudos do Mar, Brazil, 2000. Disponible en ligne : http://www.fundacaofemar.org.br/biblioteca/emb/cat_emb.html.
- [Flather, 1976] R. A. FLATHER. A tidal model of the north-west European continental shelf. *Mémoires de la Société royale des sciences de Liege*, 6(10) : 141 – 164, 1976.
- [Fontes et al., 2008] Roberto Fioravanti Carelli FONTES, Belmiro Mendes CASTRO, et Robert C. BEARDSLEY. Numerical study of circulation on the inner Amazon Shelf. *Ocean Dynamics*, 58 : 187 – 198, 2008.
- [Foreman et Neufled, 1991] M. G. G. FOREMAN et E. T. NEUFLED. Harmonic tidal analyses of long time series. *International Hydrographic Review*, 68(1) : 85 – 108, 1991.
- [Frey et George, 1999] Pascal Jean FREY et Paul-Louis GEORGE. *Maillages*. HERMES Science Publications, Paris, France, 1999.
- [Fu et Cazenave, 2001] Lee-Lueng FU et Anny CAZENAVE, éditeurs. *Satellite Altimetry and Earth Sciences*. Academic Press, 525 B Street, Suite 1900, San Diego, California 92101-4495, United States of America, 2001.
- [Gabioux, 2002] Mariela GABIOUX. Influência da lama em suspensão sobre a propagação da maré na plataforma Amazônica. Mémoire de master, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Brasil, mars 2002.
- [Gabioux et al., 2005] Mariela GABIOUX, Susana Beatriz VINZÓN, et Afonso M. PAIVA. Tidal propagation over fluid mud layers on the amazon shelf. *Continental Shelf Research*, 25 : 113 – 125, 2005.
- [Galilei, 2000] Galileo GALILEI. *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*. Points Sciences. Seuil, Paris, France, 2000. Original parut en 1632 sous le titre *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*.
- [Gallo et Vinzón, 2005] Marcos Nicolás GALLO et Susana Beatriz VINZÓN. Generation of overtides and compound tides in Amazon estuary. *Ocean Dynamics*, 55 : 441 – 448, 2005.
- [Gill, 1982] Adrian E. GILL. *Atmosphere-Ocean Dynamics*, volume 30 de *International Geophysics Series*. Academic Press, Inc., 111 Fifth Avenue, New York, New York 10003, United States of America, 1982.
- [Godement, 2003] Roger GODEMENT. *Analyse mathématique*. Springer, 1998 – 2003. Quatre volumes.

- [Godin, 1972] G. GODIN. *The analysis of tides*. University of Toronto Press, Canada, 1972.
- [Gordeev *et al.*, 1992] V. V. GORDEEV, V. A. KONNOV, et Yu. V. KONNOVA. Nitrogen Forms in the Amazon River and Estuary. Dans Egon T. DEGENS, éditeur, *Interactions of Biogeochemical Cycles in Aqueous Systems, Part 7 : SCOPE/UNEP Sonderband*, Mitteilungen aus dem Geologisch-Paläontologischen Institut der Universität Hamburg, pages 133 – 147, Hamburg, Deutschland, 1992. Scientific Committee on Problems of the Environment (SCOPE) and the United Nations Environment Program (UNEP), Hamburg : im Selbstverlag des Geologisch-Paläontologischen Institutes und des Institutes für Biogeochemie und Meereschemie des Universität Hamburg.
- [Greenberg *et al.*, 2007] David A. GREENBERG, Frédéric DUPONT, Florent H. LYARD, Daniel R. LYNCH, et Francisco E. WERNER. Resolution issues in numerical models of oceanic and coastal circulation. *Continental Shelf Research*, 27 : 1317 – 1343, 2007.
- [Guillou, 2007] Nicolas GUILLOU. *Rôles de l'hétérogénéité des sédiments de fonds et des interactions houle-courant sur l'hydrodynamique et la dynamique sédimentaire en zone subtidale – applications à la Manche Orientale et à la pointe de la Bretagne*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France, novembre 2007.
- [Guyot, 2008] Jean-Loup GUYOT. Rapport synthèse 2003 - 2007 – ORE : HYBAM. Rapport, Observatoire de recherche en environnement, mai 2008. Disponible en ligne à l'adresse : http://www.ore-hybam.org/doc/bilan%202003_2007%20ore%20hybam.pdf.
- [Hanert *et al.*, 2004] Emmanuel HANERT, Daniel Y. LE ROUX, Vincent LEGAT, et Eric DELEERSNIJDER. Advection schemes for unstructured grid ocean modelling . *Ocean Modelling*, 7(1 – 2) : 39 – 58, 2004.
- [Hanert *et al.*, 2002] Emmanuel HANERT, Vincent LEGAT, et Éric DELEERSNIJDER. A comparison of three finite elements to solve the linear shallow water equations. *Ocean Modelling*, 5 : 17 – 35, 2002.
- [Hansen, 1949] Walter HANSEN. Die halbtägigen Gezeiten im Nordatlantischen Ozean. *Deutsche Hydrographische Zeitschrift*, 2(1 - 3) : 44 – 51, janvier 1949.
- [Hendershott, 1972] M. C. HENDERSHOTT. The Effects of Solid Earth Deformation on Global Ocean Tides. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 29 : 389 – 402, 1972.
- [Hinrichsen, 1998] Don HINRICHSEN. *Coastal waters of the world : Trends, threats, and strategies*. Island press, Washington DC, United States of America, 1998.
- [Huber, 1902] Jacques HUBER. Contribuição à geografia física dos furos de Breves e da pare ocidental de Marajó. *Boletim do Museu Paraense*, 3, 1902.
- [IHO, 1990] IHO. *Tidal Constituent Bank Station Catalogue*. International Hydrographic Organization, 4 quai Antoine premier, B.P. 445, MC 98011 Monaco CEDEX, 1990. <http://www.iho-ohi.net/english/home/>.
- [Kane et Sternheim, 2004] Joseph KANE et Morton STERNHEIM. *Pysique*. Dunod, Paris, France, troisième édition, 2004.

- [Kinnmark et Gray, 1985] Ingemar P. E. KINNMARK et William G. GRAY. A generalized wave equation formulation of tidal circulation. Dans TAYLOR *et al.*, éditeur, *Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows*, pages 1312 – 1324, Swansea, United Kingdom, 1985. Pineridge Press.
- [Knuth, 1998] Donald Ervin KNUTH. *Sorting and Searching*, volume 3 de *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, deuxième édition, 1998.
- [Kosuth *et al.*, 1999] Pascal KOSUTH, Jacques CALLÈDE, A. LARAQUE, N. FILIOZOLA, Jean-Loup GUYOT, Patrick SEYLER, et J.-M. FRITCH. Influence de la marée océanique sur le cours aval de l'Amazone. Dans *Symposium Manaus 99*, novembre 1999.
- [Kozai, 1968] Y. KOZAI. Love's number of the earth derived from satellite observations. *Bulletin Géodésique*, 89(1) : 355 – 357, septembre 1968.
- [Krée, 1997] Paul KRÉE. *Intégration et théorie de la mesure, une approche géométrique*. Mathématiques pour le deuxième cycle. Ellipses Édition Marketing, 32, rue Bargue, 75740 Paris cedex 15, France, 1997.
- [Lagrange, 1788] Joseph-Louis LAGRANGE. *Mécanique analytique*. La Veuve Desaint, Libraire, Paris, France, 1788.
- [Lambrechts *et al.*, 2008] Jonathan LAMBRECHTS, Richard COMBLEN, Vincent LEGAT, Christophe GEUZAINÉ, et Jean-François REMACLE. Multiscale mesh generation on the sphere. *Ocean Dynamics*, 58 : 461 – 473, 2008.
- [Laplace, 1778] Pierre-Simon LAPLACE. *Recherches sur plusieurs points du système du Monde*. Académie royale des sciences, France, 1775 ; 1778.
- [Laplace, 1797] Pierre-Simon LAPLACE. *Mémoire sur le flux et reflux de la mer*. Académie royale des sciences, France, 1790 an V (1797).
- [Laplace, 1990] Pierre-Simon LAPLACE. *Traité de mécanique céleste*. Éditions Jacques Gabay, 1990. Quatre volumes, original publié entre 1798 et 1825 en cinq volumes.
- [Lévy-Leblond, 2009] Jean-Marc LÉVY-LEBLOND. Galilée et les marées : une fausse théorie fausse. *La Recherche*, 433 : 92 – 94, septembre 2009.
- [Le Bars *et al.*, 2010] Yoann LE BARS, Florent LYARD, Catherine JEANDEL, et Leonardo DARDENGO. The AMANDES tidal model for the Amazon estuary and shelf. *Ocean Modelling*, 31(3 – 4) : 132 – 149, janvier 2010. doi : 10.1016/j.ocemod.2009.11.001.
- [Le Hénaff, 2008] Matthieu LE HÉNAFF. *Évaluation objective de réseaux d'observation en domaine côtier par la modélisation d'ensemble*. Thèse de doctorat, Université Toulouse III – Paul SABATIER, 118, Route de Narbonne - F-31062 Toulouse cedex 9, France, février 2008.
- [Le Provost, 1974] Christian LE PROVOST. *Contribution à l'étude des marées dans les mers littorales. Applications à la Manche*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble – Institut national polytechnique, France, avril 1974.
- [Le Provost et Vincent, 1986] Christian LE PROVOST et Patrick VINCENT. Some Tests of Precision for a Finite Element Model of Ocean Tides. *Journal of Computational Physics*, 65(2) : 273 – 291, août 1986.

- [Le Roux *et al.*, 1997] Daniel Y. LE ROUX, Charles A. LIN, et Andrew STANFORTH. An accurate interpolating scheme for semi-Lagrangian advection on an unstructured mesh for ocean modelling. *Tellus A*, 49(1) : 119 – 138, 1997.
- [Le Roux *et al.*, 1998] Daniel Y. LE ROUX, Andrew STANFORTH, et Charles A. LIN. Finite Elements for Shallow-Water Equation Ocean Models. *Monthly Weather Review*, 126 : 1931 – 1951, juillet 1998.
- [Legrand *et al.*, 2007] Sébastien LEGRAND, Éric DELEERSNIJDER, Éric DELHEZ, et Vincent LEGAT. Unstructured, anisotropic mesh generation for the Northwestern European continental shelf, the continental slope and the neighbouring ocean. *Continental Shelf Research*, 27 : 1344 – 1356, 2007.
- [Letellier, 2004] Thierry LETELLIER. *Étude des ondes de marée sur les plateaux continentaux*. Thèse de doctorat, Université Toulouse III – Paul SABATIER, 118, Route de Narbonne - F-31062 Toulouse cedex 9, France, décembre 2004.
- [Leveque, 2002] Randall J. LEVEQUE. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge texts in applied mathematics. Cambridge University Press, 40 West 20th Street, New York, NY 10011-4211, United States of America, 2002.
- [Lions, 1996] Pierre-Louis LIONS. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics – Volume 1 : Incompressible Models*, volume 3 de *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Walton Street, Oxford OX2 6DP, United Kingdom, 1996.
- [Lions, 1998] Pierre-Louis LIONS. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics – Volume 2 : Compressible Models*, volume 10 de *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Walton Street, Oxford OX2 6DP, United Kingdom, 1998.
- [Lucquin et Pironneau, 1996] Brigitte LUCQUIN et Olivier PIRONNEAU. *Introduction au calcul scientifique*. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson S.A., 120, boulevard Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06, France, 1996.
- [Lyard, 2010] Florent LYARD. *T-UGOm (Toulouse-Unstructured Grid Ocean model), Developer manuals series*. Disponible à cette adresse : <http://sirocco.omp.obs-mip.fr/outils/Tugo/Documentation/TugoDocTech.htm>, 2010.
- [Lyard et Le Bars, 2010] Florent LYARD et Yoann LE BARS. Geographical database construction for the Amazon estuary modelling. *CSR*, 2010. En cours de rédaction.
- [Lyard *et al.*, 2006] Florent LYARD, Fabien LEFEVRE, Thierry LETELLIER, et Olivier FRANCIS. Modelling the global ocean tides : modern insights from FES2004. *Ocean Dynamics*, 56(5 - 6) : 394 – 415, décembre 2006.
- [Lynch et Gray, 1979] Daniel R. LYNCH et William G. GRAY. A wave equation model for finite element tidal computations. *Computers and Fluids*, 7 : 207 – 228, 1979.
- [Marsaleix *et al.*, 2006] Patrick MARSALEIX, Francis AUCLAIR, et Claude ESTOURNEL. Considerations on open boundary conditions for regional and coastal ocean models. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 23 : 1604 – 1613, 2006.

- [Milliman et Meade, 1983] John D. MILLIMAN et Robert H. MEADE. World-wide delivery of river sediment to the oceans. *The Journal of Geology*, 91(1) : 1 – 21, janvier 1983.
- [Minster *et al.*, 1995] J.-F. MINSTER, M.-L. GENCO, et C. BROSSIER. Variations of the sea level in the amazon estuary. *Continental Shelf Research*, 15(10) : 1287 – 1302, 1995.
- [Monahan, 2008] Dave MONAHAN. Mapping the floor of the entire world ocean : the general bathymetric chart of the oceans. *Journal of Ocean Technology*, 3(1) : 108, janvier – février – mars 2008.
- [Mourre, 2004] Baptiste MOURRE. *Étude de configuration d'une constellation de satellites altimétriques pour l'observation de la dynamique côtière*. Thèse de doctorat, Université Toulouse III – Paul SABATIER, 118, Route de Narbonne – F-31062 Toulouse cedex 9, France, novembre 2004.
- [Muller-Karger *et al.*, 1988] Frank E. MULLER-KARGER, Charles R. MCCLAIN, et Philip L. RICHARDSON. The dispersal of the Amazon's water. *Nature*, 333(6168) : 56 – 59, mai 1988.
- [Navier, 1821] Claude-Louis Marie Henri NAVIER. *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*. Académie royale des sciences, France, mai 1821. Lu à l'Académie royale des sciences le 14 mai 1821.
- [Navier, 1822] Claude-Louis Marie Henri NAVIER. *Sur les lois du mouvement des fluides, en ayant égard à l'adhésion de leurs molécules*. Académie royale des sciences, France, mars 1822. Lu à l'Académie royale des sciences le 18 mars 1822.
- [Newton, 1687] Isaac NEWTON. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Jussu Societatis Regiæ ac Typis, juillet 1687.
- [Nielsen, 1992] Peter NIELSEN. *Coastal bottom boundary layers and sediment transport*, volume 4 de *Advanced Series on Ocean Engineering*. World Scientific, P.O. Box 128, Farrer Road, Singapore 9128, 1992.
- [Nihoul, 1977] Jacques C. J. NIHOUL. Three-dimensional model of tides and storm surges in a shallow well-mixed continental sea. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 2 : 29 – 47, 1977.
- [Nikiema *et al.*, 2007] Oumarou NIKIEMA, Jean-Luc DEVENON, et Malika BAKLOUTI. Numerical modeling of the Amazon River plume. *Continental Shelf Research*, 27 : 873 – 899, 2007.
- [O'Rourke, 1998] Joseph O'ROURKE. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, The Edingburgh Building, Cambridge CB2 2RU, United Kingdom, deuxième édition, 1998.
- [Pairaud *et al.*, 2008] Ivane L. PAIRAUD, Florent LYARD, Francis AUCLAIR, Thierry LETELLIER, et Patrick MARSALEIX. Dynamics of the semi-diurnal and quarter-diurnal internal tides in the Bay of Biscay. Part 1 : Barotropic tides. *Continental Shelf Research*, 28 : 1294 – 1315, 2008.
- [Parker, 1991] Bruce B. PARKER, éditeur. *Tidal Hydrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 1991.

- [Pedlosky, 1987] Joseph PEDLOSKY. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag New York, 175 Fifth Avenue, New York, New York 10010, United States of America, deuxième édition, 1987.
- [Poncet, 1979] Alain PONCET. *Autour de l'écriture d'un code d'éléments finis*. Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Institut National Polytechnique de Grenoble, mars 1979.
- [Press et al., 2002] William H. PRESS, Saul A. TEUKOLSKY, William T. VETTERLING, et Brian P. FLANNERY. *Numerical Recipes in C++, The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, The Edingburgh Building, Cambridge CB2 2RU, United Kingdom, deuxième édition, 2002.
- [Provost et Vallée, 2006] Jean-Pierre PROVOST et Gérard VALLÉE. *Les maths en physique : La physique à travers le filtre des mathématiques, avec éléments d'analyse numérique*. Cours et applications. Dunod, Paris, France, deuxième édition, 2006.
- [Roblou et al., 2007] Laurent ROBLOU, Florent LYARD, Matthieu LE HENAFF, et Claire MARALDI. X-Track, a new processing tool for altimetry in coastal oceans. *Proceedings Envisat Symposium*, avril 2007.
- [Schwartz, 1998] Laurent SCHWARTZ. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, volume 3 de *Collection enseignement des sciences*. Hermann, éditeurs des sciences et des arts, 293, rue Lecourbe, 75015 Paris, France, 1998.
- [Schwiderski, 1980a] E. W. SCHWIDERSKI. Ocean tides : 1- Global ocean tide equation. *Marine Geodesy*, 3 : 161 – 217, 1980.
- [Schwiderski, 1980b] E. W. SCHWIDERSKI. Ocean tides : 2- A hydrodynamic interpolation model. *Marine Geodesy*, 3 : 219 – 255, 1980.
- [Simon, 2007] Bernard SIMON. *La marée océanique côtière*. Collection « Synthèses ». Institut océanographique éditeur, 195, rue Saint-Jacques, F-75005 Paris, janvier 2007.
- [Smagorinsky, 1963] Joseph SMAGORINSKY. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, 91(3) : 99 – 164, mars 1963.
- [Smith et Sandwell, 1997] W. H. F. SMITH et D. T. SANDWELL. Global seafloor topography from satellite altimetry and ship depth soundings. *Science*, 277 : 1957 – 1962, septembre 1997.
- [Soublin, 2000] Jean SOUBLIN. *Histoire de l'Amazonie*. Voyageurs Payot. Payot, mars 2000.
- [Soulsby et al., 1993] R. L. SOULSBY, L. HAMM, G. KLOPMAN, D. MYRHAUG, R. R. SIMONS, et G. P. THOMAS. Wave-current interaction within and outside the bottom boundary layer. *Coastal Engineering*, 21 : 41 – 69, 1993.
- [Stokes, 1842] George Gabriel STOKES. On the steady motion of incompressible fluids. *Cambridge Philosophical Society Transactions*, 7 : 39 – 454, 465, 1842.
- [Stroustrup, 2003] Bjarne STROUSTRUP. *Le langage C++ – Édition spéciale, revue et corrigée*. Pearson Education France, 47 bis, rue des Vinaifriers, 75010 Paris, France, 2003.

- [Stull, 1988] Roland B. STULL. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Publishers, P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands, 1988.
- [Sverdrup *et al.*, 1942] Harald Ulrik SVERDRUP, Martin W. JOHNSON, et Richard H. FLEMIN. *The Oceans : Their Physics, Chemistry, and General Biology*. Prentice-Hall Inc., 1942.
- [Syslo, 1981] M. SYSLO. On some problems related to fundamental cycle sets of a graph. Dans R. CHARTRAND, éditeur, *Theory of Applications of Graphs*, pages 577 – 588, New York, United States of America, 1981. Wiley.
- [Szwarcfiter et Lauer, 1975] Jayme Luiz SZWARCFITER et Peter Ernst LAUER. A new backtracking strategy for the enumeration of the elementary cycles of a directed graph. Rapport Technique 69, University of Newcastle upon Tyne, computing laboratory, Claremont Tower, New Castle upon Tyne, NE1 7RU, England, 1975.
- [Szwarcfiter et Lauer, 1976] Jayme Luiz SZWARCFITER et Peter Ernst LAUER. A search strategy for the elementary cycles of directed graph. *BIT Numerical Mathematics*, 16(2) : 192 – 204, juin 1976.
- [Tauvel, 2005] Patrice TAUVEL. *Géométrie*. Dunod, Paris, France, deuxième édition, 2005.
- [Tidal Observations Committee, 1868] TIDAL OBSERVATIONS COMMITTEE. *Committee for the purpose of promoting the extension, improvement, and harmonic analysis of tidal observations*. British Association for the Advancement of Science, London, United Kingdom, 1868. Titre usuel : Tidal observations.
- [Vignudelli *et al.*, 2005] S. VIGNUDELLI, P. CIPOLLINI, Laurent ROBLOU, Florent LYARD, G. P. GASPARINI, G. MANZELLA, et M. ASTRALDI. Improved satellite altimetry in coastal systems : Case study of the Corsica Channel (Mediterranean Sea). *Geophysical Research Letters*, 32, avril 2005.
- [Vincent, 1987] Patrick VINCENT. *Modélisation aux éléments finis des marées océaniques*. Thèse de doctorat, Université scientifique, technologique et médicale de Grenoble, avril 1987.
- [Werner et Lynch, 1986] Francisco E. WERNER et Daniel R. LYNCH. Field studies with the wave equation formulation. Dans SÁ DE COSTA *et al.*, éditeur, *Proceedings of the 6th Conference on Finite Elements in Water Resources*, pages 547 – 560, 175, Fifth Avenue, New York, New York 10010, United States of America, 1986. Springer-Verlag.
- [Werner et Lynch, 1987] Francisco E. WERNER et Daniel R. LYNCH. Field verification of Wave Equation tidal dynamics in the English Channel and southern North Sea. *Advances in Water Resources*, 10(3) : 115 – 130, septembre 1987.
- [Wolper, 2006] Pierre WOLPER. *Introduction à la calculabilité*. Sciences sup. Dunod, Paris, France, troisième édition, octobre 2006.
- [Zahel, 1977] W. ZAHEL. Global hydrodynamic-numerical 1-degrees-model of ocean tides – oscillation system of M-2-tide and its distribution of energy-dissipation. *Annales de géophysique*, 33(1 - 2) : 31 – 40, 1977.

- [Zakharova *et al.*, 2006] Elena A. ZAKHAROVA, Alexei V. KOURAEV, Anny CAZENAVE, et Frédérique SEYLER. Amazon River discharge estimated from TOPEX/Poseidon altimetry. *Comptes Rendus Géoscience*, 338(3) : 188 – 196, février 2006.

Index

- A**
- advection 138
 - âge de la marée 10
 - Amandes 1–2
 - assert 167
- B**
- barocline 32
 - barotrope 32
- C**
- chemin 145
 - coefficient de traînée 89–93
 - condition
 - d'imperméabilité 33, 38
 - de DIRICHLET 38
 - de FLATHER 38
 - conditions aux limites 37–38
 - conservation
 - de la masse 31
 - de la quantité de mouvement 34
 - de la quantité de mouvement ... 31, 34
 - couche
 - d'EKMAN de fond 93–95, 97
 - de mélange 97, 101
 - cycle 145
 - cycle élémentaire 145
- D**
- distension 1
- E**
- écoulement irrotationnel 13
 - équation
 - d'état 31
 - de concentration 31
 - de continuité 34
 - de la chaleur 31
 - équations
 - de NAVIER-STOKES 2, 29–31
 - shallow water* 32–34
 - exceptions 167–168
- F**
- fleuve Amazone 4–9
 - fluide parfait 13
 - Fluxandes 1
 - formulation
 - de DOWDEN 95–97, 101–106
 - de PEDLOSKY 93–95, 97–101
- G**
- géométrie 54
 - graphe 145
 - graphe orienté 145
- I**
- isopycnes 4
- J**
- jour lunaire 12
 - jusant 11
- M**
- marégraphe 53
 - mascaret 5
 - méthode de NEWTON 97–106
- N**
- nadir 13
 - namespace** 165
- O**
- ondes internes 4
 - Organisation hydrographique internationale 53
- P**
- point amphidromique 18

R

rétroflexion.....5

S

static 166

syzigie 10

T

T-UGO_m.....2, 65, 138

template.....166

Résumé

À la frontière entre les continents et les océans, les marges continentales sont le siège de la grande majorité des apports de matière – dissoutes et solides, organiques et inorganiques – d’origine continentale vers l’océan. Elles sont aussi directement en contact avec les masses d’eau océaniques qui échangent de la matière et des éléments avec ces marges. L’érosion et le transport par les rivières étant une des sources essentielles des éléments chimiques à l’océan, la remise en suspension de matériel sédimenté et les forts mélanges d’eau favorisent les transferts de matière du continent vers l’océan. Le projet Amandes a pour objectif l’étude de ces échanges entre continents et océans, en étudiant le cas particulier du transport d’éléments en provenance des montagnes andines vers l’océan Atlantique par le système amazonien. Trois disciplines complémentaires – géochimie continentale et marine, océanographie physique et modélisation hydrodynamique (incluant l’assimilation de données) – sont associées pour atteindre ces objectifs.

Parmi les modèles de la zone existants, aucun ne répond aux besoins du projet Amandes. Cette thèse a consisté à établir un nouveau modèle, qui permettra d’explorer en profondeur le problème du transport, c’est-à-dire le déplacement de toute la colonne d’eau et ce qu’elle contient, par exemple des sédiments. Cependant, établir un nouveau modèle hydrodynamique dans le but d’étudier le transport de matériaux par le fleuve Amazone dans l’océan Atlantique était un sujet trop ambitieux pour une seule thèse. En conséquence, nous nous sommes attachés à établir les bases d’un modèle qui sera étendu par la suite.

Pour répondre à ses besoins de modélisation, le projet Amandes a opté pour le modèle à grilles non-structurées T-UGOm. L’avantage des grilles non-structurées est leur grande souplesse, qui leur permet de s’adapter finement aux spécificités géographiques de la zone modélisée. Dans le cas de l’estuaire de l’Amazone, où la géographie peut être complexe, cette particularité est un avantage critique. Pour appliquer T-UGOm au cas de l’Amazone, il a fallu préciser certains schémas numériques. Également, l’estuaire étant une zone de fortes marées, avec des fonds de faibles profondeurs sur de grandes étendues et soumise à de forts courants, le frottement de fond a une influence primordiale. Nous avons donc apporté un effort important pour affiner la prise en compte de ce frottement par le modèle. D’autre part, tant la faiblesse des fonds marin que la complexité de la géographie induisent également une forte influence du trait de côtes et de la bathymétrie. En conséquence, une part importante des efforts a été dédiée à établir un trait de côtes et une bathymétrie de la zone aussi précis que possible.

La marée étant le phénomène hydrodynamique de plus forte amplitude dans la zone, nous nous sommes focalisés sur sa modélisation. Les développements évoqués précédemment ont permis, lorsque l'on compare notre meilleure solution de marée avec les données *in situ* et satellites, d'améliorer sensiblement la modélisation de la marée. En comparant notre meilleure solution avec celles déjà publiées, celle-ci est plus proche des données collectées. Ceci ouvre la voie à une modélisation hydrodynamique plus complète, en particulier du transport.

Mots clefs Plateau amazonien ; Amandes ; marée ; hydrodynamique ; grille non-structurée ; éléments finis ; frottement de fond ; bathymétrie ; trait de côtes ; T-UGOm.

Abstract

The vast majority of material flows (solid and dissolved, organic and inorganic) coming from continent into ocean happens in continental margin, as it is the interface between continents and oceans. Continental margin also exchange materials and elements with ocean water. One of the main sources of chemical elements in the ocean is erosion and transport by rivers, material from continent to ocean being promoted by re-suspension of sediments and important water mixtures. The AMANDES project aims to study transports from the Andean mountains to the Atlantic Ocean through the Amazon system. Three complementary disciplines – continental and marine geochemistry, physical oceanography, and hydrodynamic modeling (including data assimilation) – are combined to achieve these goals.

None of the available models of this area can be used in AMANDES project. Therefore, the purpose of the thesis has been to establish a new model, with which it will be possible to explore in depth the problem of transport, i.e. the moving of the whole water column and what it contains, such as sediments. However, establishing a new hydrodynamical model in order to study the transport of materials by the Amazon River in the Atlantic Ocean was a subject too ambitious for just one thesis. As a consequence, we have established the foundations for a model to be extended thereafter.

In order to meet its modelling needs, the AMANDES project has chosen the unstructured grids model T-UGOm. Unstructured grids are very flexible, and thus can be closely adapted to the specific geographical area being modeled. In the case of the Amazon estuary, where the geography can be complex, this characteristic is a critical advantage. To apply T-UGOm to the case of the Amazon river, we have clarify some numerical schemes. Also, as the estuary is an area of strong tides, large shallow waters, and subject to strong currents, bottom friction has a major influence. As a consequence, we have made a major effort to refine the inclusion of friction in this model. Moreover, shallow waters and complex geography induce a strong influence of coastlines and bathymetry, so a significant effort has been dedicated to establish a digital coastline and bathymetry database as fine and accurate as possible.

As tide is the hydrodynamic phenomenon of greatest amplitude in the area, we focused on its modelling. Comparing our best solution with in situ and satellite data, the developments mentioned above have significantly improved the tidal modeling. Also, this solution is closer to the collected data than those already published. This opens the way for a more complete hydrodynamic modeling, especially transport.

Keywords Amazon shelf; AMANDES; tide; hydrodynamic; unstructured grid; finite elements; bottom friction; bathymetry; coastline; T-UGOm.